UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

63. BAND, 3. HEFT
MIT 7 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM MAI 1959)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1959

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

63. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Rembs, E. Flächen mit demselben sphärischen Bild 209

Tschupik, J. P. Über lineare Zweibildersysteme im projektiven R_n 214

McCarthy, P. J. On an Arithmetic Function 228

Müller, H. R.. Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik 231

Mirsky, L. Remarks on an Existence Theorem in Matrix Theory Due to A. Horn 241

Marcus, S. Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations . . 244

Pinl, M. Zur Differentialgeometrie im totalisotropen R_2 und R_3 eines komplexen euklidischen R_4 und R_5 256

Fan, Ky, and **Householder, A. S.** A Note Concerning Positive Matrices and M-Matrices 265

Wunderlich, W. Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung 271

Lesky, P., und **Kaiser, A.** Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew 277

Heigl, F. Einige Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen 287

Izbicki, H. Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften. 298

Buchbesprechungen 302

Flächen mit demselben sphärischen Bild

Von

E. Rembs, Berlin

(Eingegangen am 12. Juli 1958)

In meiner Arbeit von Band 8, 469—471 des Archivs habe ich Flächen betrachtet, die durch parallele Normalen aufeinander bezogen sind oder dasselbe sphärische Bild haben und für die in entsprechenden Punkten die Summen der Hauptkrümmungsradien übereinstimmen: $r_1 + r_2 = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$. Ein ausführliches Literaturverzeichnis über die hierher gehörigen Existenz- und Eindeutigkeitsfragen findet sich bei *Grotemeyer* (Archiv **9**, 117—122). Ich bewies, daß die Flächen in enger Beziehung zu den infinitesimalen Verbiegungen der Kugel und der Theorie der Minimalflächen stehen. Hier soll gezeigt werden, daß man auch den Fall $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$ mit der Theorie der infinitesimalen Verbiegung (allerdings nicht der Kugel) in Zusammenhang bringen und ihn für den Beweis von Eindeutigkeitssätzen verwenden kann.

1. Die Formeln für die Bestimmung einer Fläche mit gegebenem sphärischen Bild sind bei *Bianchi-Lukat*, Differentialgeometrie 2. Auflage § 64 angegeben. Sie vereinfachen sich, wenn man annimmt, daß das Parametersystem auf der Bildkugel ein Isothermensystem ist, so daß für die Fundamentalgrößen der dritten Differentialform $e = g$, $f = 0$ gilt. Man hat zunächst die zweiten Fundamentalgrößen L, M, N so zu bestimmen, daß bei gegebenem $r_1 r_2$ die Gleichung

$$r_1 r_2 = \frac{LN - M^2}{e^2} \tag{1}$$

und zwei „*Codazzi*sche Gleichungen" erfüllt sind, als deren Koeffizienten aber die *Christoffel*schen Symbole, gebildet für das sphärische Bild, auftreten. Dann ergibt sich der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ aus dem Normalenvektor ξ nach den Gleichungen

$$\mathfrak{x}_u = -\frac{1}{e}(L\,\xi_u + M\,\xi_v),\ \mathfrak{x}_v = -\frac{1}{e}(M\,\xi_u + N\,\xi_v). \tag{2}$$

$\bar{\mathfrak{x}}$ sei der Ortsvektor einer zweiten Fläche, deren sphärisches Bild mit dem von $\mathfrak{x}$ übereinstimmt. Für $\bar{\mathfrak{x}}$ gelten die Gleichungen (1), (2), wobei man $r_1, r_2, L, M, N, \mathfrak{x}$ durch die überstrichenen Größen zu ersetzen hat.

Ich betrachte neben den Flächen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ die Flächen mit den Ortsvektoren

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}, \quad \bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}.$$

Ich addiere zu den Gleichungen (2) die analogen für $\bar{\mathfrak{x}}$ und erhalte

$$\mathfrak{y}_u = -\frac{1}{e}(l\,\xi_u + m\,\xi_v), \quad \mathfrak{y}_v = -\frac{1}{e}(m\,\xi_u + n\,\xi_v) \tag{3}$$

und bei Subtraktion

$$\bar{\mathfrak{y}}_u = -\frac{1}{e}(\bar{l}\,\xi_u + \bar{m}\,\xi_v), \quad \bar{\mathfrak{y}}_v = -\frac{1}{e}(\bar{m}\,\xi_u + \bar{n}\,\xi_v). \tag{4}$$

Hier wurde gesetzt

$$l = L + \bar{L}, \; m = M + \bar{M}, \; n = N + \bar{N}, \tag{5}$$

$$\bar{l} = L - \bar{L}, \; \bar{m} = M - \bar{M}, \; \bar{n} = N - \bar{N}. \tag{6}$$

l, m, n sind die Fundamentalgrößen 2. Ordnung der Fläche $\mathfrak{y}$, $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ die der Fläche $\bar{\mathfrak{y}}$; denn z. B. ist $L = -\mathfrak{x}_u \xi_u$, $\bar{L} = -\bar{\mathfrak{x}}_u \xi_u$, $l = -(\mathfrak{x}_u + \bar{\mathfrak{x}}_u)\xi_u$ usw.

Die Flächen $\mathfrak{y}$, $\bar{\mathfrak{y}}$ entsprechen den Flächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$, wie man sieht, auch durch Parallelität der Normalen.

Um $\mathfrak{y}$, $\bar{\mathfrak{y}}$ direkt in Zusammenhang zu bringen, lösen wir (3) nach ξ_u, ξ_v auf und substituieren die Werte in (4):

$$\xi_u = -\frac{e(n\,\mathfrak{y}_u - m\,\mathfrak{y}_v)}{l\,n - m^2}, \quad \xi_v = -\frac{e(-m\,\mathfrak{y}_u + l\,\mathfrak{y}_v)}{l\,n - m^2},$$

$$\bar{\mathfrak{y}}_u = \frac{(n\,\bar{l} - m\,\bar{m})\,\mathfrak{y}_u + (l\,\bar{m} - m\,\bar{l})\,\mathfrak{y}_v}{l\,n - m^2}, \quad \bar{\mathfrak{y}}_v = \frac{(n\,\bar{m} - m\,\bar{n})\,\mathfrak{y}_u + (l\,\bar{n} - m\,\bar{m})\,\mathfrak{y}_v}{l\,n - m^2}. \tag{7}$$

Nun ist aber

$$(L + \bar{L})\,(N - \bar{N}) - 2(M + \bar{M})\,(M - \bar{M}) + (N + \bar{N})\,(L - \bar{L}) = 0,$$

wie sich sofort durch Ausrechnen wegen $LN - M^2 = \bar{L}\,\bar{N} - \bar{M}^2$ ergibt, und daher

$$l\,\bar{n} - 2\,m\,\bar{m} + n\,\bar{l} = 0. \tag{8}$$

Die Formeln (7) besitzen daher eine besondere wichtige Eigenschaft. Nämlich der Koeffizient von $\mathfrak{y}_u$ in dem Ausdruck für $\bar{\mathfrak{y}}_u$ und der von

$\mathfrak{y}_v$ in dem Ausdruck für $\bar{\mathfrak{y}}_v$ haben nach (8) die Summe 0. Das wird auch oft durch die Formel ausgedrückt

$$\bar{\mathfrak{y}}_u \times \mathfrak{y}_v = \bar{\mathfrak{y}}_v \times \mathfrak{y}_u.$$

Man weiß dann, daß $\bar{\mathfrak{y}}$ Drehriß von $\mathfrak{y}$ bei einer infinitesimalen Verbiegung dieser Fläche ist und umgekehrt (*Efimow*, Flächenverbiegung im Großen, Berlin 1957 § 24 Formel (14)). Bei *Bianchi* heißt ein solches Flächenpaar, das durch parallele Normalen aufeinander bezogen ist, assoziiert, und schon die Gleichung (8) ist charakteristisch (*Bianchi-Lukat* § 161). Es gilt also

Satz 1: *Sind* $\mathfrak{x}$ *und* $\bar{\mathfrak{x}}$ *zwei Flächen mit demselben sphärischen Bild und ist* $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$, *so sind die Flächen* $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$ *und* $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}$ (*im Sinne von Bianchi*) *assoziiert oder* (*in der Terminologie von Blaschke*) *Drehrisse voneinander bei infinitesimalen Verbiegungen.*

2. Die Formeln (7) sind unter der Voraussetzung aufgestellt, daß die Größe $ln - m^2 \neq 0$ ist. Wir wollen uns nach der geometrischen Bedeutung von $ln - m^2 = 0$ fragen.

Aus den Gleichungen (3) berechne ich die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche $\mathfrak{y}$. Man erhält wegen $e = \xi_u^2 = \xi_v^2 = g$, $f = \xi_u \xi_v = 0$,

$$\mathfrak{y}_u^2 = \frac{1}{e}(l^2 + m^2), \quad \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = \frac{1}{e}(lm + mn), \quad \mathfrak{y}_v^2 = \frac{1}{e}(m^2 + n^2)$$

und daher

$$\mathfrak{y}_u^2 \mathfrak{y}_v^2 - (\mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v)^2 = \frac{1}{e^2}(ln - m^2)^2. \tag{9}$$

Für die Krümmung der Fläche $\mathfrak{y}$ findet man daher

$$\frac{1}{K} = \frac{ln - m^2}{e^2}, \tag{10}$$

wie nach Gleichung (1) nicht anders zu erwarten war.

Aber aus (9) ersieht man: *An Stellen mit* $ln - m^2 = 0$ *ist die Fläche* $\mathfrak{y}$ *nicht regulär.*

3. Wenn wir den konstruierten Zusammenhang für Fragen der Differentialgeometrie im Großen verwerten wollen, sind nach dem vorigen Stellen mit $ln - m^2 = 0$ zu vermeiden. Das geschieht, wenn wir z. B. $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ konvex und gleich orientiert voraussetzen. Wir nehmen also an, die zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ seien beide positiv definit. Dann kann nirgends $ln - m^2 = 0$ sein. Man sieht das am einfachsten, wenn man für den Moment $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ für die Umgebung eines

betrachteten Punktes auf ein anderes Parametersystem als bisher bezogen denkt, nämlich auf das in diesem Fall reelle gemeinsame konjugierte System. Sann sind L, N, $\bar{L}$, $\bar{N}$ alle > 0, $M = \bar{M} = 0$, also l, n positiv, $n = 0$. Auch die Form $l\,du^2 + n\,dv^2$ ist positiv definit, und das gilt folglich bei Einführung irgend eines zulässigen Parametersystems.

Wenn also die Flächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ *konvex und gleich orientiert sind, ist auch die Fläche* $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$ *konvex und überall regulär.*

4. Seien $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Eiflächen (mit nirgends verschwindender Krümmung). In entsprechenden Punkten soll $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$ sein. Dann ist auch $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$ eine Eifläche. $\bar{\mathfrak{y}}$ ist Drehriß derselben bei einer infinitesimalen Verbiegung. Aber jeder Drehriß einer Eifläche ist ein Punkt. Der Drehvektor $\bar{\mathfrak{y}}$ ist ein konstanter Vektor. Daher folgt aus (4)

$$\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0$$

oder wegen (6)

$$L = \bar{L},\ M = \bar{M},\ N = \bar{N},$$

d. h. die Flächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ sind kongruent.

Satz 2: *Sind* $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ *zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Eiflächen und ist in allen entsprechenden Punkten* $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$, *so sind die Flächen kongruent.*

5. Jetzt seien die durch parallele Normalen aufeinander bezogenen konvexen Flächen nicht geschlossen, sondern etwa einfach zusammenhängende Flächen, deren Ränder durch Schiebung auseinander hervorgehen.

Um auch ihre Kongruenz zu beweisen, wende ich die Formel von *Blaschke* für infinitesimale Verbiegung an (Efimow § 32 Formel (1)). Sie lautet im vorliegenden Fall

$$\oint_{\Gamma} (\mathfrak{y}\ \bar{\mathfrak{y}}\ \bar{\mathfrak{y}}')\,ds = 2 \int\!\!\int_{D} \frac{\bar{l}\,\bar{n} - \bar{m}^2}{l\,n - m^2}\,(\mathfrak{y}\ \xi)\,do.$$

Da am Rande $\mathfrak{x}' = \bar{\mathfrak{x}}'$ gilt, ist $\bar{\mathfrak{y}}' = 0$. Daher verschwindet das Randintegral. Liegt nun der Nullpunkt so, daß $\mathfrak{y}$ ihm die hohle Seite zuwendet, so ändert sich auf der Fläche das Vorzeichen von $(\mathfrak{y}\ \xi)$ nicht. Es muß also, wie unter 4., die Größe $\bar{l}\,\bar{n} - \bar{m}^2$ überall $= 0$ sein. Aber das hat, wie in der Theorie der infinitesimalen Verbiegung gezeigt wird (Efimow § 32), $\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0$ zur Folge, und es gilt

Satz 3: *Sind* $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ *zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene konvexe Flächen, ist in entsprechenden Punkten* $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$ *und gehen*

die Ränder der Flächen durch Schiebung auseinander hervor, so sind die Flächen kongruent. Sie gehen durch Schiebung auseinander hervor.

6. Die Sätze 3 und 4 sind bekannt. Welche der zahlreichen bei infinitesimalen Verbiegungen behandelten Randwertprobleme für hier auftretende Probleme außerdem nutzbar gemacht werden können, müßte im einzelnen untersucht werden. Ich will noch ein Beispiel angeben, in dem es möglich ist.

Satz 4: *Sind* $\mathfrak{x}$ $\bar{\mathfrak{x}}$ *durch parallele Normalen aufeinander bezogene konvexe Flächen mit* $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$ *und mit ebenen Rändern in parallelen Ebenen, so sind sie kongruent.*

Nämlich bei den angegebenen Voraussetzungen haben auch $\mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}$ ebene Ränder, und wenn $\mathfrak{b}$ Stellungsvektor der Randebenen ist, hat man also $(\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{b}) = 0$ (der Strich bedeutet Ableitung nach der Bogenlänge des Randes von $\mathfrak{y}$). Diese Gleichung besagt (Monatshefte für Mathematik **60**, 58), daß die Krümmung des Randes von $\mathfrak{y}$ bei der Verbiegung mit Drehriß $\bar{\mathfrak{y}}$ stationär ist. Das hat aber Starrheit von $\mathfrak{y}$ zur Folge. Also ist $\bar{\mathfrak{y}} = \text{const}$, $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ müssen alle verschwinden. Die Flächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ sind kongruent.

Über lineare Zweibildersysteme im projektiven R_n

Von

Josef P. Tschupik, Graz

Mit 4 Textabbildungen

(Eingegangen am 24. Juli 1958)

1. Einleitung

In der vorangegangenen Arbeit [3] „Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen" wurde bei allen behandelten Zweibildersystemen vorausgesetzt, daß der Schnittraum X der Bildräume Π_1, Π_2 und der Verbindungsraum O der Projektionszentren Z_1, Z_2 zueinander allgemein[1] liegen sollen, soferne sie überhaupt als echte Teilräume des R_n auftreten. Nun sollen jene aus zwei P-Projektionen[2] zusammengesetzten Zweibildersysteme betrachtet werden, bei denen X und O zueinander speziell liegen. Im R_3 wurde bereits von *E. Müller* und *E. Kruppa* für $\dim Z_i = 0$, $\dim \Pi_i = 2$ $(i=1, 2)$ in [2], S. 127 ein solcher Sonderfall behandelt. — Den Abschluß dieser Arbeit bildet ein allgemeiner Satz über Zweibildersysteme.

Definition der y-Systeme. Ein Zweibildersystem, in dem X und O echte Teilräume des R_n sind, möge *y-System* heißen, falls $(OX) = Y = R_y$ ist, wobei y der Bedingung

$$\text{Max. } (0, \dim (OX)_a + 1) \leqq y \leqq \text{Min. } (\dim O - 1, \dim X) \qquad (1a)$$

genüge. Der Index a bei $\dim (OX)_a$ bedeutet, daß diese Dimension so zu berechnen ist, als ob O und X allgemeine Lage zueinander hätten. Z_i und Π_i $(i=1, 2)$ müssen als Zentrum und Bildraum einer P-Projektion punktfremd sein. Wäre $y = \dim O$, so läge O in X, also Z_i in Π_i; daher wurde in (1a) $y \leqq \dim O - 1$ verlangt.

---

[1] Der Begriff „allgemeine Lage zweier Räume zueinander" wird in dem in [3], Fußnote 4 erklärten Sinn gebraucht.

[2] Die Bezeichnungen in dieser Arbeit schließen sich an jene in [3] an.

Ersetzt man in einem a-, x-, z- oder xz-System[2] die Voraussetzung der allgemeinen Lage von O zu X durch (1a), so möge das entstehende System sinngemäß mit ay-, xy-, yz- oder xyz-*System* bezeichnet werden.

Aus einem a-, x- oder z-System kann man nur dann ein ay-, xy- oder yz-System herleiten, wenn

$$r_1 + r_2 \geqq n + 2 \tag{1b}$$

gilt, da sonst nicht gleichzeitig $O(O \neq R_n)$ und X auftreten (siehe [3]) Für xz-Systeme gilt diese Einschränkung nicht, da X nach Voraussetzung auftritt, während O nach [3], 3.3.1. in allen z-Systemen echter Teilraum des R_n ist. — Man kann offenbar von einem gegebenen a-, x-, z- oder xz-System zu einem y-System übergehen, indem man die Zentren Z_1, Z_2 und die projizierenden Räume $p_1 = [Z_1 P]$, $p_2 = [Z_2 P]$ und $p_0 = [OP]$ — wobei P ein abzubildender Punkt ist — festhält, während man die Lage der Bildräume Π_1, Π_2 so verändert, daß sich O und X in einem Raum Y von der Dimension y schneiden. Man erkennt daraus, daß Y nur die Situation in den Bildräumen beeinflußt.

Falls im Ausgangssystem Ordner auftreten, kann man zeigen, daß durch den Übergang zum y-System die Ordnerdimension nicht geändert wird. Die Ordner in Π_i sind nach [3] die Schnitträume der einzelnen p_0 mit Π_i. Eine Zunahme der Ordnerdimension würde bedeuten, daß im y-System p_0 und Π_i in einem echten Teilraum $R_{n-\mu}(\mu \geqq 1)$ des R_n liegen. Innerhalb dieses $R_{n-\mu}$ wäre dann

$$\dim (Z_i \Pi_i) = (n - r_i) + (r_i - 1) - (n - \mu) = \mu - 1 \geqq 0.$$

Da dies im Widerspruch zur Punktfremdheit von Z_i und Π_i steht, ist die Behauptung bewiesen.

2. ay-Systeme und xy-Systeme

2.1. Abbildung allgemein liegender Punkte. O und X treten unter der Voraussetzung (1b) in beiden Systemen auf und es ist $\dim O = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$. Für a-Systeme war $\dim X = r_1 + r_2 - (n + 2)$ und für x-Systeme galt $\dim X = x$, wobei x der Bedingung

$$\text{Max. } (0, r_1 + r_2 - (n + 1)) \leqq x \leqq \text{Min. } (r_1 - 1, r_2 - 1) \tag{2}$$

genügen mußte. Nach 1. gelten diese Dimensionen auch für ay-Systeme bzw. für xy-Systeme, doch ist wegen (1b) in (2) die Schranke 0 überflüssig. Für $\dim X$ schreiben wir künftig x' und es bedeute $x' = r_1 + r_2 - (n + 2)$ für ay-Systeme bzw. $x' = x$ für xy-Systeme.

In a-Systemen sind O und X stets punktfremd, denn es ist

$$\dim(OX) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + [r_1 + r_2 - (n + 2)] - n = -1.$$

In x-Systemen ist dagegen

$$\dim(OX) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + x - n = n + x + 1 - (r_1 + r_2)$$

und es können wegen (2) O und X nie punktfremd sein. (1a) geht bei ay-Systemen in

$$0 \leqq y \leqq \text{Min.}\,(2n - (r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 - (n + 2)) \tag{3}$$

und bei xy-Systemen in

$$n + x + 2 - (r_1 + r_2) \leqq y \leqq \text{Min.}\,(2n - (r_1 + r_2),\ x) \tag{4}$$

über. In beiden Systemen ist $[OX]$ echter Teilraum des R_n, denn es ist

$$\dim[OX] = 2n + 1 - (r_1 + r_2) + x' - y$$

und man erkennt bei ay-Systemen unmittelbar, daß $\dim[OX] = n - (y + 1) < n$ ist, während in xy-Systemen $\dim[OX] = 2n + x + 1 - (r_1 + r_2 + y) < n$ aus (4) folgt.

Innerhalb $[OX]$ gilt für den Schnittraum von X und Z_i

$$\dim(Z_i X) = (n - r_i) + x' - [2n + x' + 1 - (r_i + r_j + y)] = r_j + y - (n + 1) \qquad (i, j = 1, 2, i \neq j).$$

Da Z_i und Π_i eine P-Projektion bestimmen und daher punktfremd sein müssen, muß man in beiden Systemen zusätzlich $\dim(Z_i X) < 0$, d. h.

$$y < n + 1 - r_j \tag{5}$$

verlangen. Da (5) auch $y \leqq \dim Z_j$ bedeutet und $\dim Z_j \leqq \dim O - 1$ ist, erkennt man, daß $\dim Z_j$ an die Stelle der Schranke $\dim O - 1$ treten muß, dagegen kann man zeigen, daß die Schranke x' i. a. nicht entbehrlich ist. Bei ay-Systemen geht dadurch (3) in

$$0 \leqq y \leqq \text{Min.}\,(n - r_j,\ r_i + r_j - (n + 2)) \tag{3'}$$

über und da zumindest $y = 0$ stets brauchbar ist, *kann man jedes a-System vom Typ* $r_1 + r_2 \geqq n + 2$ *mindestens auf eine Art in ein ay-System überführen.* Analog geht (4) in

$$n + x + 2 - (r_i + r_j) \leqq y \leqq \text{Min.}\,(n - r_j,\ x) \tag{4'}$$

über. Da (4') nur unter der Voraussetzung $x < r_i - 1$ richtig ist — da sonst die obere Schranke kleiner als die untere Schranke wäre — *gibt es keine xy-Systeme mit inzidenten Bildräumen.* Wegen (2) gilt dann

$$r_i + r_j - (n + 2) < x < r_i - 1$$

und man erkennt, *daß xy-Systeme nur für* $r_j < n$ *auftreten können.*

In [3] wurden sowohl bei a-Systemen als auch bei x-Systemen die Typen $r_1 + r_2 = n + 2$ und $r_1 + r_2 > n + 2$ getrennt. Im Falle $r_1 + r_2 = n + 2$ war jedes Punktepaar P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$) Bildpaar eines R_n-Punktes. Es traten keine Ordner in den Bildräumen auf, da die p_0 nicht echte Teilräume des R_n waren. Beim Übergang zu y-Systemen bleiben die p_0 unverändert, *daher treten auch in den ay-Systemen bzw. xy-Systemen vom Typ* $r_1 + r_2 = n + 2$ *keine Ordner auf.* — Unter der Voraussetzung $r_1 + r_2 > n + 2$ waren in den a-Systemen bzw. in den x-Systemen die Bildpunkte P', P'' eines R_n-Punktes P an Ordner p_2' in Π_1 bzw. p_1'' in Π_2 gebunden. Die Ordner in Π_i hatten die Dimension $n - r_j + 1$. In den a-Systemen schnitten sich je zwei entsprechende Ordner in einem Punkt von X. In den x-Systemen hatten sie dagegen einen Schnittraum der Dimension $n + x + 2 - (r_1 + r_2)$, wobei diese $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ einen festen $R_{n+x+1-(r_1+r_2)}$ enthielten. Nach 1. bleibt beim Übergang zu y-Systemen die Ordnerdimension unverändert. Da Y in O und in X, also auch in Π_i (i=1, 2) liegt, ist Y auch in $O_i = (O\Pi_i)$ enthalten und es ist daher $(O_1 O_2) = Y$. O_i liegt in allen Ordnern von Π_i, also ist Y allen Ordnern von Π_1 und Π_2 gemein. Schließt man die Punkte von $[OX]$ von der Abbildung aus, so kann man behaupten, daß je zwei entsprechende Ordner nur Y gemein haben. Der Schnittraum entsprechender Ordner p_1'', p_2' ist $(p_1'' p_2') = (p_0 X)$. Hätten p_0 und X einen $R_{y+\lambda}$ mit $\lambda \geqq 1$ gemein, so hätte der Verbindungsraum von p_0 und X die Dimension

$$\dim [p_0 X] = 2n + 2 - (r_1 + r_2) + x' - (y + \lambda),$$

während andererseits für jeden Punkt P, der nicht in $[OX]$ liegt, $\dim [p_0 X] = \dim [OPX] = \dim [OX] + 1 = 2n + x' + 2 - (r_1 + r_2 + y) \leqq n$ gilt. Die beiden Ergebnisse sind nur für $\lambda = 0$ gleich, womit die Behauptung bewiesen ist. Nach Ausschluß der Punkte aus $[OX]$ liegen im Gegensatz zu den a- und x-Systemen in den ay- und xy-Systemen die Ordnerbünde nicht mehr perspektiv. Es wird sich später zeigen, daß innerhalb $[OX]$ noch Perspektivität auftreten kann.

Da die beiden Ordnerbünde $O_1(p_2')$ und $O_2(p_1'')$ nach wie vor zum Bund $O(p_0)$ perspektiv liegen, gilt

In ay-Systemen und in xy-Systemen vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$ *ist nach Ausscheidung der Punkte von* $[OX]$ *allen Ordnern* Y *und nur* Y *gemein und die Ordnerbünde* O_1 *und* O_2 *sind nicht mehr perspektiv, sondern nur mehr projektiv aufeinander bezogen.* (6)

2.2. Abbildung der Punkte aus $[O\,X]$. Nach [3], (2) werden die Punkte aus $[OX]$ aus $Z_i^* = Z_i$ $(i, j = 1, 2)$ auf $\Pi_i^* = ([OX]\,\Pi_i)$ abgebildet. In diesem Zweibildersystem $\mathfrak{S}^*$ ist $[OX]$ Oberraum; wir schreiben daher $\dim [OX] = 2n + x' + 1 - (r_1 + r_2 + y) = n^*$. Wegen $Z_i^* = Z_i$ ist $n^* - r_i^* = n - r_i$ bzw. $r_i^* = n + x' + 1 - (r_j + y)$ und daher $\dim \Pi_i^* = r_i^* - 1 = n + x' - (r_j + y)$. Es ist $\dim \Pi_i^* \geqq x'$, da $n + x' - (r_j + y) \geqq x'$ bzw. $r_j + y \leqq n$ wegen (5) erfüllt ist.

Da Z_i, Π_i $(i = 1, 2)$ kein z-System war, kann auch $\mathfrak{S}^*$ keines sein. $\mathfrak{S}^*$ kann auch kein y-System sein, da Y innerhalb $[OX]$ der kleinste Schnittraum von $O^* = O$ und $X^* = X$ ist. Dagegen ist $\mathfrak{S}^*$ ein x-System, da bei allgemeiner Lage von Π_1^* und Π_2^*

$$\dim X_a^* = \dim (\Pi_1^*\,\Pi_2^*) = r_1^* + r_2^* - (n^* + 2) = x' - (y + 1)$$

wäre, während nach Voraussetzung $\dim X^* = \dim X = x'$ ist und der Vergleich $\dim X_a^* < \dim X^*$ zeigt. Der Typ dieses x-Systems hängt nach [3], 3.4. von den Größen $r_1^* + r_2^*$ und $n^* + 2$ ab. Da $r_1^* + r_2^* = 2n + 2x' + 2 - (r_1 + r_2 + 2y)$ und $n^* + 2 = 2n + x' + 3 - (r_1 + r_2 + y)$ ist, erkennt man, daß $r_1^* + r_2^* \gtreqless n^* + 2$ ist, je nachdem $y \gtreqless x' - 1$ gilt. Setzt man für x' ein, so erhält man zusammenfassend:

In ay-Systemen werden die Punkte aus $[OX]$ durch ein x-System $\mathfrak{S}^*$ abgebildet. Es ist in diesem x-System $n^* = n - (y + 1)$, $r_i^* = r_i - (y + 1)$, $\dim Z_i^* = n - r_i$, $\dim \Pi_i^* = r_i - (y + 2)$ und $\dim X^* = r_1 + r_2 - (n + 2)$. *$\mathfrak{S}^*$ ist vom Typ* $r_1^* + r_2^* \gtreqless n^* + 2$, *je nachdem* $r_1 + r_2 - (n + 3) \gtreqless y$ *ist.* (7)

In xy-Systemen werden die Punkte aus $[OX]$ durch ein x-System $\mathfrak{S}^*$ abgebildet. Es ist $n^* = 2n + x + 1 - (r_1 + r_2 + y)$, $r_i^* = n + x + 1 - (r_j + y)$, $\dim Z_i^* = n - r_i$, $\dim \Pi_i^* = n + x - (r_j + y)$ *und* $\dim X^* = x$. *Dieses x-System ist vom Typ* $r_1^* + r_2^* \gtreqless n^* + 2$, *je nachdem* $y \gtreqless x - 1$ *ist.* (8)

Da Y Teilraum von X ist, gibt es für den Fall $y > x' - 1$ nur die Möglichkeit $y = x'$. Es ist dann $\dim O = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$ und $\dim [OX] = 2n + x' + 1 - (r_1 + r_2 + y) = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$, also $O = [OX]$. In ay-Systemen vom Typ $r_1 + r_2 = n + 2$ muß $y = x'$ sein, da $x' = 0$ ist. Für xy-Systeme gilt diese Einschränkung wegen (2) nicht.

Unter den Systemen vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$ ist vor allem der Fall $y < x'$ interessant, da die Punkte aus $[OX]$ durch ein x-System vom Typ $r_1^* + r_2^* > n^* + 2$ abgebildet werden. In einem solchen x-System sind nach [3], 3.4. die Bildpunkte P', P'' eines Punktes $P (P \notin O)$ an Ordner

gebunden. Die Dimensionen der Ordner in Π_i ist $n - r_j + 1$ $(i, j = 1, 2)$. Je zwei entsprechende Ordner schneiden sich nach [3], (25) in einem Raum der Dimension $n^* + x^* + 2 - (r_1^* + r_2^*) = y + 1$. Diese R_{y+1} liegen in $X^* = X$ und enthalten Y. Die Ordner in Π_1^*, Π_2^* liegen somit perspektiv.

Unter Verwendung der Ergebnisse über x-Systeme (vgl. [3], 3.4.) kommt man zur nachfolgenden Übersicht (9). Sie soll zeigen, wie innerhalb eines ay- oder xy-Systems die Art der Abbildung eines Punktes P davon abhängt, ob P in O, in $[OX]$ oder außerhalb $[OX]$ liegt. $P \to P', P''$ bedeute, daß P auf das Bildpaar P', P'' abgebildet wird.

Übersicht. (9)

<table>
<tr><th></th><th>$y < x' - 1$</th><th>$y = x' - 1$</th><th>$y = x'$</th></tr>
<tr><td>$P \notin [O\,X]$</td><td colspan="2">I a) ay-Systeme vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$,
II a) xy-Systeme vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$,
$P \to P', P''$ in Ordnern. Ordnerschnitt $= (p_1'' \; p_2') = Y$.
II b) xy-Systeme vom Typ $r_1 + r_2 = n + 2$,
$P \to P', P''$ ohne Ordner.</td><td>I b) ay-Systeme mit $r_1 + r_2 = n + 2$, $P \to P', P''$ ohne Ordner.</td></tr>
<tr><td>$P \in [O\,X]$, $P \notin O$</td><td>x-System in $[OX]$ vom Typ $r_1^* + r_2^* > n^* + 2$, $P \to P', P''$ in Ordnern. dim $(p_1'' \; p_2') = y + 1$</td><td>x-System in $[O\,X]$ vom Typ $r_1^* + r_2^* = n^* + 2$ $P \to P', P''$ ohne Ordner</td><td>für a) u. b)
x-System in $[O\,X] = O$ vom Typ $r_1^* + r_2^* = n^* + 1$. Treffgeraden von $Z_1, Z_2 \to P', P''$.</td></tr>
<tr><td>$P \in O$</td><td colspan="2">x-System $\overline{Z}_i$, $\overline{\Pi}_i$ in O vom Typ $\overline{r}_1 + \overline{r}_2 = \overline{n} + 1$.
Treffgeraden von $Z_1, Z_2 \to P', P''$.</td><td></td></tr>
</table>

2.3. Beispiele.

1. Man erhält im R_3 ein ay-System vom Typ $r_1 + r_2 = n + 2$, wenn man $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ und $y = 0$ wählt. Es ist dann $\dim Z_1 = 0$, $\dim \Pi_1 = 2$, $\dim \Pi_2 = \dim Z_2 = 1$, d. h. es ist nach *F. Hohenberg* (vgl. [1]) die erste P-Projektion als Riß und die zweite als Kotierung zu bezeichnen. Die Ebene $[OX] = O$ enthält den Schnittpunkt X der Bildräume, es ist also $y = \dim X$. Die Zentren sind innerhalb O so zu wählen, daß sie

nicht Y enthalten. Abb. 1 zeigt den Abbildungsvorgang für einen allgemein liegenden Punkt P und für einen Punkt Q aus $[OX] = O$. $\Pi_2^* = Y$ liegt in Π_1^*. Die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 bilden das Strahlbüschel Z_1. Die zweiten Bildpunkte Q'' der Punkte $Q \in O$ liegen im Punkt Y.

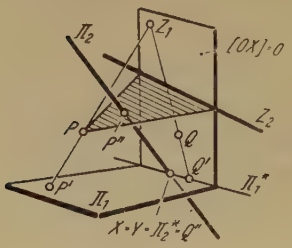

Abb. 1

2. Abb. 2 zeigt das von *E. Müller* und *E. Kruppa* ([2], S. 127) behandelte Beispiel eines ay-Systems im R_3. Es ist $r_1 = r_2 = 3$ und $y = 0$, also $y = \dim X - 1$. Beide P-Projektionen sind Risse; der *Doppelsehstrahl* O und der *Grundschnitt* X haben den Punkt Y gemein. Die Bilder P', P'' eines Punktes $P(P \notin [OX])$ liegen in entsprechenden Strahlen der projektiven Ordnerbüschel O_1, O_2, wobei $O_1 = O_2 = Y$ ist. Die Punkte Q der Ebene $[OX]$ werden auf Q', Q'' in $\Pi_1^* = \Pi_2^* = X$ abgebildet. O ist die einzige Treffgerade von Z_1 und Z_2. Für $R \in O$ ist $R' = R'' = Y$.

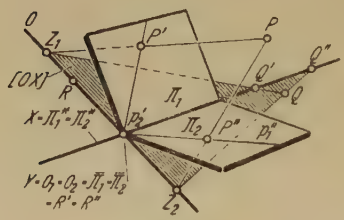

Abb. 2

3. ay-Systeme vom Typ $y < \dim X - 1$ treten im R_3 nicht auf. Im R_4 erhält man ein solches System für $r_1 = r_2 = 4$ und $y = 0$. Die Zentren sind Punkte, die Bildräume sind Hyperebenen. Die Gerade O und die Ebene X haben den Punkt Y gemein. Die Ordner in Π_1 und Π_2 bilden zwei Strahlbündel mit dem gemeinsamen Träger Y. Für das x-System in der Hyperebene $[OX]$ gilt $\dim \Pi_i^* = 2$ $(i = 1, 2)$, $\dim X^* = 2$, also $\Pi_1^* = \Pi_2^* = X$. In diesem x-System fällt jeder Ordner mit seinem entsprechenden zusammen. O ist die einzige Treffgerade von Z_1 und Z_2; die Bildpaare R', R'' der Punkte R aus O fallen daher nach Y. In Abb. 3 wurde der Abbildungsvorgang für die Punkte $P(P \notin [OX])$, Q aus

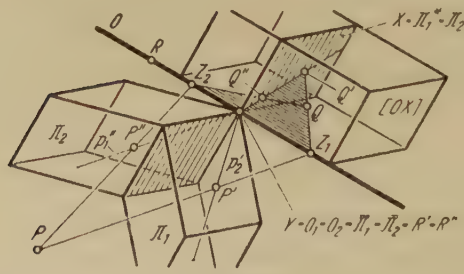

Abb. 3

$[OX]$ und R aus O skizziert.

4. Wie man sich leicht überzeugen kann, gibt es im R_3 keine xy-Systeme. Im R_4 gibt es ein xy-System für $r_1 = r_2 = 3$. Die Zentren sind Geraden und die Bildräume sind Ebenen. Wählt man Π_1, Π_2 so, daß sie sich in einer Geraden X schneiden, so bestimmen sie ein x-System. Diese Gerade hätte bei allgemeiner Lage mit der Hyperebene O einen Punkt gemein, liegt sie aber ganz in O, so ist Z_i, Π_i $(i = 1, 2)$ ein xy-System. Für dieses System gilt $x = 1$, $y = 1$ und $r_1 + r_2 = n + 2$. Es treten keine Ordner auf. Innerhalb der Hyperebene $O = [OX]$ werden die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 auf die Punktepaare der Geraden $\Pi_1^* = \Pi_2^* = X = Y$ abgebildet.

5. Ein xy-System vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$ findet man erst im R_5, wenn man $r_i = 4$ $(i = 1, 2)$, $x = 2$ und $y = \dim X - 1 = 1$ wählt. Es ist dann $\dim Z_i = 1$, $\dim \Pi_i = 3$ und $\dim O = 3$.

3. yz-Systeme und xyz-Systeme

3.1. Abbildung allgemein liegender Punkte. Nach [3], 3.3.1. unterscheiden sich z-Systeme von den a-Systemen durch die Voraussetzung

$$(Z_1 Z_2) = Z \text{ mit } \dim Z = z \text{ und}$$

$$\text{Max. } (0, n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z \leqq \text{Min. } (n - r_1, n - r_2). \quad (10)$$

Für xz-Systeme gilt zusätzlich noch (2). In allen xz-Systemen treten O und X als echte Teilräume des R_n auf, in den z-Systemen aber nur unter der Voraussetzung (1b). Ersetzt man die Voraussetzung der allgemeinen Lage von O zu X durch (1a), so gehen z-Systeme in yz-Systeme und xz-Systeme in xyz-Systeme über. Im Falle der yz- oder xyz-Systeme muß in (10) rechts das Gleichheitszeichen wegfallen, da z. B. bei $z = n - r_1$ $O = Z_2$ wäre und Z_2 mit Π_2 den Schnittraum Y hätte. Da andererseits in (10) $0 \leqq z$ vorausgesetzt wird, *kann man yz- bzw. xyz-Systeme nur für $r_i < n$ erwarten.* — Für yz-Systeme folgt aus (1b), daß in (10) Max. $(0, n + 1 - (r_1 + r_2)) = 0$ ist. Nach [3] ist in yz-Systemen und in xyz-Systemen $\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z)$. Für $\dim X$ werde wieder x' eingeführt und es bedeute $x' = r_1 + r_2 - (n + 2)$ in yz-Systemen und $x' = x$ in xyz-Systemen, wobei im letzteren Falle x der Voraussetzung (2) genüge. Bei allgemeiner Lage von O zu X wäre in z-Systemen

$$\dim (OX)_a = 2n - (r_1 + r_2 + z) + x' - n = n + x' - (r_1 + r_2 + z) = -z - 2,$$

es muß daher die linke Seite von (1a) in $0 \leqq y$ übergehen. Zusammenfassend lauten vorläufig die Voraussetzungen für yz-Systeme

$$r_1 + r_2 \geqq n + 2, \tag{11a}$$

$$0 \leqq y \leqq \text{Min. } (2n - (r_1 + r_2 + z + 1), r_1 + r_2 - (n + 2)), \tag{11b}$$

$$O \leqq z < \text{Min. } (n - r_1, n - r_2) \tag{11c}$$

und für xyz-Systeme

$$\text{Max. } (0, r_1 + r_2 - (n + 1)) \leqq x \leqq \text{Min. } (r_1 - 1, r_2 - 1), \tag{12a}$$

$$\text{Max. } (0, n + x + 1 - (r_1 + r_2 + z)) \leqq y \leqq \text{Min. } (2n - (r_1 + r_2 + z + 1), x), \tag{12b}$$

$$\text{Max. } (0, n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z < \text{Min. } (n - r_1, n - r_2). \tag{12c}$$

Es ist $\dim [OX] = 2n - (r_1 + r_2 + z) + x' - y$. Soll $[OX]$ echter Teilraum des R_n sein, so muß $\dim [OX] < n$ also $n + x' - (r_1 + r_2 + z) < y$ gelten. Dies ist für $x' = r_1 + r_2 - (n + 2)$ sicher erfüllt, es gilt aber auch für $x' = x$ wegen (12b).

In $[OX]$ ist (für $i, j = 1, 2$ und $i \neq j$)

$$\dim (Z_i X) = n - r_i + x' - [2n + x' - (r_i + r_j + y + z)] = r_j + y + z - n.$$

Da X in Π_i liegt und Π_i mit Z_i keinen Punkt gemein haben darf, muß man zusätzlich $\dim (Z_i X) < 0$, also

$$y < n - (r_j + z) \qquad (j = 1, 2) \tag{13}$$

voraussetzen. Da wir vorhin $r_i < n$ voraussetzen mußten, ist

$$n - (r_j + z) < \dim O = 2n - (r_i + r_j + z),$$

d. h. es tritt nun $n - (r_j + z)$ an die Stelle der Schranke $\dim O - 1$. (11b) bzw. (12b) gehen daher in

$$0 \leqq y \leqq \text{Min.} (n - (r_j + z + 1), r_i + r_j - (n + 2)), \tag{11b'}$$

$$\text{Max.} (0, n + x + 1 - (r_i + r_j + z)) \leqq y \leqq \text{Min.} (n - (r_j + z + 1), x). \tag{12b'}$$

Für xyz-Systeme folgt aus (12b') wegen $n + x + 1 - (r_i + r_j + z) \leqq n - (r_j + z + 1)$ die Bedingung $x < r_i - 1$, d. h. *es gibt keine xyz-Systeme mit inzidenten Bildräumen.*

Nach [3], 3.3. unterteilt man die z-Systeme und nach [3], 3.5. die xz-Systeme in die Typen $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ und $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$.

Bei den yz- bzw. xyz-Systemen wird dieselbe Unterteilung zweckmäßig sein. Der Fall $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ ist bei den yz-Systemen auszuschließen, da er wegen (11a) zu $z < 0$ führen würde. Fordert man in einem xyz-System $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$, so geht die linke Seite von (12b') in $x \leqq y$ über. Andererseits fordert die rechte Seite von (12b') $y \leqq x$, also können nur für $x = y$ xyz-Systeme vom genannten Typ erwartet werden. Ersetzt man nun in (12b') y durch x, so gewinnt man die Bedingung $x < n - (r_j + z)$. Also gilt

Es gibt keine yz-Systeme vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$. *In den xyz-Systemen von diesem Typ muß* $x = y$ *und* $x < n - (r_j + z)$ *sein.* (14)

Da nach 1. beim Übergang zu y-Systemen die Ordnerdimensionen nicht geändert werden, folgt aus [3], 3.5.:

In xyz-Systemen vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ *werden nach Ausschluß der Punkte aus* $[OX]$ *die* R_{z+1} *des Bundes Z eineindeutig auf die Punktepaare* P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ *abgebildet.* (15)

Unter der Voraussetzung $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ sind in den z- und xz-Systemen und daher gleicherweise in den yz- und xyz-Systemen die Bildpunkte P', P'' eines Punktes P an Ordner gebunden. Die Ordner in Π_i haben nach [3], 3.3. bzw. [3], 3.5. die Dimension $n - (r_j + z)$ $(i, j = 1, 2)$ und enthalten $O_i = (O\Pi_i)$. Da X in Π_i liegt, ist $Y = (OX)$ in O_i, also in allen Ordnern enthalten. Schließt man die Punkte von $[OX]$ von der Abbildung aus, so kann man behaupten, daß je zwei entsprechende Ordner nur Y gemein haben. Hätten sie einen $R_{y+\lambda}$ mit $\lambda \geqq 1$ gemein, so wäre

$$\dim [p_0 X] = [2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)] + x' - (y + \lambda).$$

Da andererseits für jeden Punkt P, der nicht in $[OX]$ liegt,

$$\dim [p_0 X] = \dim [OPX] = \dim [OX] + 1 = 2n + x' + 1 - (r_1 + r_2 + y + z)$$

ist, zeigt der Vergleich, daß $\lambda = 0$ sein muß. Man muß sich allerdings zuvor vergewissern, daß in der letzten Gleichung nicht $\dim [p_0 X] > n$ ist. Dies tritt nicht ein, da $[OX]$ echter Teilraum des R_n ist. — Da also je zwei entsprechende Ordner Y und i. a. nur Y gemein haben, liegen die Ordnerbünde O_1, O_2 nicht mehr perspektiv. Sie sind jedoch einander projektiv zugeordnet, da sie nach wie vor perspektiv zum Bund O mit p_0 liegen. Zusammenfassend gilt:

In den yz-Systemen und xyz-Systemen vom Typ $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ *liegen die Bildpunkte* P', P'' *eines Punktes* $P (P \notin [OX])$ *in Ordnern der*

projektiven Ordnerbünde O_1, O_2. Die Ordner in Π_i haben die Dimension $n = (r_j + z)$. Allen Ordnern ist Y gemein. (16)

3.2. Abbildung der Punkte aus [O X]. Die Punkte aus $[O\,X]$ werden nach [3], (2) durch ein Zweibildersystem $\mathfrak{S}^*$ mit Z_i^*, Π_i^* $(i = 1, 2)$ abgebildet, wobei $Z_i^* = Z_i$ und $\Pi_i^* = ([OX]\,\Pi_i)$ ist. Da $[OX]$ als Oberraum fungiert, setzen wir $\dim [OX] = 2n + x' - (r_1 + r_2 + y + z) = n^*$. Aus $\dim Z_i^* = n^* - r_i^* = n - r_i$ folgt $r_i^* = n + x' - (r_j + y + z)$ und $\dim \Pi_i^* = n + x' - (r_j + y + z + 1)$. Die Bedingung $\dim \Pi_i^* \geqq x'$ führt zu $n - 1 \geqq r_j + y + z$ und dies ist wegen (13) stets erfüllt.

$\mathfrak{S}^*$ kann kein y-System sein, da Y innerhalb $[OX]$ der kleinstmögliche Schnittraum von $O^* = O$ und $X^* = X$ ist. — Hätte Π_1 bezüglich Π_2 allgemeine Lage, so wäre $\dim X_a^* = r_1^* + r_2^* - (n^* + 2) = x' - (y + z + 2)$. Da nach Voraussetzung aber $\dim X^* = x'$ ist, muß $\mathfrak{S}^*$ ein x-System sein. — Bei allgemeiner Lage der Zentren wäre $\dim Z_a^* = n^* - (r_1^* + r_2^*) = y + z - x'$. Nach Voraussetzung ist $\dim Z^* = z$, daher gilt $\dim Z_a^* \leqq \dim Z^*$, je nachdem $y \leqq x'$ ist. $\mathfrak{S}^*$ ist also ein x-System, wenn $y = x'$ bzw. ein xz-System, wenn $y < x'$ ist.

a) **Es sei y = x'.** Dann ist $r_1^* + r_2^* = 2n - (r_1 + r_2 + 2z)$ und $n^* + 1 = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)$, d. h. das x-System $\mathfrak{S}^*$ ist vom Typ $r_1^* + r_2^* < n^* + 1$. Unter Verwendung von [3], 3.4. bzw. [3], (17) findet man

Gilt in einem yz-System oder in einem xyz-System $y = x'$, so ist das x-System $\mathfrak{S}^*$ in $[OX]$ vom Typ $r_1^* + r_2^* < n^* + 1$. Der Urbildraum $[T_1\,T_2]$ eines Bildpaares P', P'' hat die Dimension $z + 2$, wobei die T_i $(i=1, 2)$ in Z_i liegen, Z enthalten und die Dimension $z + 1$ haben. (17)

b) **Es sei y < x'.** Nach [3], 3.5. ist $z^* \gtreqless n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$, d. h. $x' - 1 \gtreqless y$ ausschlaggebend für den Typ des xz-Systems $\mathfrak{S}^*$ in $[OX]$. Für $x' - 1 < y$ gibt es nur die Möglichkeit $x' = y$; dieser Fall wurde schon unter a) behandelt. Es gilt somit

Unter der Voraussetzung $y = \dim X - 1$ werden im yz-System bzw. im xyz-System die Punkte aus $[OX]$ durch ein xz-System $\mathfrak{S}^*$ vom Typ $z^* = n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$ abgebildet. Ist dagegen $y < \dim X - 1$, so ist das xz-System $\mathfrak{S}^*$ vom Typ $z^* > n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$. (18)

Unter Verwendung der Ergebnisse [3], (27) und (32) über die Abbildung der Punkte aus O in x- bzw. in xz-Systemen erhält man:

Übersicht. (19)

<table>
<tr><th></th><th>$y < x' - 1$</th><th>$y = x' - 1$</th><th>$y = x'$</th></tr>
<tr><td>$P \notin [O\,X]$</td><td colspan="2">I a) yz-Systeme vom Typ $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$,
II a) xyz-Systeme vom Typ $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$,
R_{z+1} durch $Z \to P', P''$ in Ordnern.
Ordnerschnitt $= (p_1'' p_2') = Y$.</td><td>II b) xyz-Systeme vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$,
R_{z+1} durch $Z \to P', P''$,
ohne Ordner.</td></tr>
<tr><td>$P \in [O\,X]$
$P \notin O$</td><td>xz-System in $[O\,X]$ v. Typ
$z^* > n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$.
R_{z+1} durch $Z \to P', P''$ in Ordnern.
dim $(p_1'' p_2') = y + 1$</td><td>xz-System in $[O\,X]$ vom Typ
$z^* = n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$
R_{z+1} durch $Z \to P', P''$, ohne Ordner.</td><td>für a) und b)
x-System in $[O\,X] = O$ vom Typ
$r_1^* + r_2^* < n^* + 1$.
$[T_1\,T_2] = R_{z+2} \to P', P''$</td></tr>
<tr><td>$P \in O$</td><td colspan="2">x-System in O vom Typ
$\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$.
$[T_1\,T_2] = R_{z+2} \to P', P''$.</td><td></td></tr>
</table>

3.3. Beispiele.

1. Man kann sich leicht überzeugen, daß es im R_3 keine yz-Systeme gibt. Im R_4 findet man ein yz-System für $r_1 = r_2 = 3$ und $y = z = 0$. Die Zentren Z_1, Z_2 sind zwei einander schneidende Geraden, ihre Verbindungsebene O geht durch den Schnittpunkt X der Bildebenen Π_1, Π_2. Es ist also $X = Y$ und $O = [OX]$. Die Ordner sind Geraden, die Ordnerbüschel haben Y als gemeinsamen Träger. Da $[OX] = [T_1\,T_2]$ ist, haben die Punkte Q aus $[OX]$ dasselbe Bildpaar $Q' = Q'' = Y$.

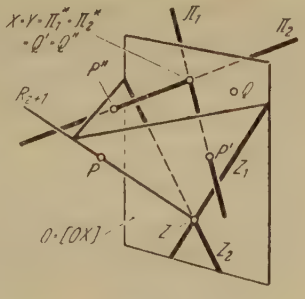

Abb. 4

2. Ein xyz-System vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ erhält man im R_3 (Abb. 4), wenn man $r_1 = r_2 = 2$, $x = y = z = 0$ wählt. Die beiden P-Projektionen sind Kotierungen. Die Geraden Z_1, Z_2 haben den Punkt Z, die Geraden Π_1, Π_2 den Punkt X gemein. Die Ebene O geht durch den Punkt $X = Y$. In den Bildräumen treten keine Ordner auf. Für die Punkte Q aus O ist $Q' = Q'' = Y$.

4. Zusammenfassung der Zweibildersysteme

Die Untersuchungen in [3] und in der vorliegenden Arbeit zeigen, daß die einzelnen Typen der Zweibildersysteme gewisse Ähnlichkeiten aufweisen, es soll hier daher versucht werden, die wesentlichen Eigenschaften aller Zweibildersysteme in einem einzigen Satz zusammenzufassen.

Voraussetzung: Im projektiven R_n sei ein aus zwei P-Projektionen zusammengesetztes Zweibildersystem gegeben. Die Zentren seien Z_1, Z_2 ($\dim Z_i = n - r_i$; r_i *ist eine natürliche Zahl, für die* $2 \leqq r_i \leqq n$ *gilt*; $i = 1, 2$), *die Bildräume seien* Π_1, Π_2 (*mit* $\dim \Pi_i = r_i - 1$). *Wir bezeichnen mit Z den Schnittraum der Zentren* ($\dim Z = z \geqq -1$), *mit X den Schnittraum der Bildräume, mit O den Verbindungsraum der Zentren* ($\dim O \leqq n$), *mit* O_i *den Schnittraum von O mit* Π_i *und mit Y den Schnittraum von O mit X* ($\dim Y = y$). *P sei ein abzubildender Punkt des* R_n, *sein Bildpaar heiße P', P''* ($P^{(i)} \in \Pi_i$). *Die Punkte aus* Z_i *seien von der Abbildung ausgeschlossen, da für sie* $P^{(i)}$ *unbestimmt ist.*

Unter dieser Voraussetzung gilt: (20)

a) *Hat ein Punkt* $P(P \notin O)$ *das Bildpaar P', P'', so ist P', P'' auch Bildpaar der Punkte des Verbindungsraumes* $[PZ] = R_{z+1}$.

b) *Hat ein Punkt P aus O das Bildpaar P', P''* ($P^{(i)} \in O_i$), *so ist P', P'' auch Bildpaar der Punkte eines* R_{z+2}. *Es ist* $R_{z+2} = [T_1\, T_2]$ *mit* $\dim T_i = z + 1$, *wobei* T_i *in* Z_i *liegt und Z enthält.*

c) *P', P''* ($P^{(i)} \in \Pi_i$, $P^{(i)} \notin O_i$) *ist dann und nur dann Bildpaar eines* R_n*-Punktes P, wenn P' und P'' in entsprechenden Ordnern* p_2', p_1'', ($\dim p_j^{(i)} = n - (r_j + z)$) *der projektiven Ordnerbünde* O_1, O_2 ($\dim O_i = n - (r_j + z + 1)$) *liegen.*

d) *Jedes Punktepaar P', P'', für das* $P^{(i)} \in O_i$ *gilt, ist Bildpaar eines Punktes aus O.*

e) *Je zwei entsprechende Ordner* p_2', p_1'', *die echte Teilräume ihrer Bildräume sind und in* $[OX]$ *liegen, schneiden sich in einem in X liegenden* R_{y+1} *des Bundes Y, liegen sie aber nicht in* $[OX]$, *so haben sie nur Y gemein.*

Anmerkungen

Zu a) Im Falle punktfremder Zentren ist $z = -1$ zu setzen. $\dim [PZ] = 0$ bedeutet dann, daß außer P kein weiterer Punkt das Bildpaar P', P'' hat.

Zu b) Ist $z = -1$, so sind die $[T_1\, T_2]$ die Treffgeraden von Z_1 und Z_2.

Zu c) $\dim p_j^{(i)} \geqq r_i - 1 = \dim \Pi_i$ bedeute, daß $P^{(i)}$ in Π_i frei wählbar ist. $\dim p_j^{(i)} = 0$ bedeutet, daß nach Vorgabe von $P^{(j)}$ der Punkt $P^{(i)}$ eindeutig in Π_i festgelegt ist.

Zu e) $p_j^{(i)} \in [OX]$ ist gleichbedeutend mit $p_j^{(i)} \in [O_i Y]$. — Ist y nicht vorgegeben, sondern berechnet man y ohne Rücksicht auf die Dimension des kleinsten Oberraumes von O und X aus der Formel

$$y = \dim O + \dim X - n,$$

so kann $y \gtreqless -1$ sein. $y = -1$ bedeutet dann, daß sich je zwei entsprechende und in $[OX]$ liegende Ordner in einem Punkt von X schneiden, während die übrigen Ordner punktfremd sind. Im Falle $y < -1$ sind je zwei entsprechende Ordner punktfremd.

Literatur

[1] *F. Hohenberg*, Projektionen projektiver Räume, Mh. Math. 61 (1957) S. 54—66.

[2] *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 1, Die linearen Abbildungen, bearbeitet von *E. Kruppa*, Deuticke, Leipzig und Wien, 1923.

[3] *J. Tschupik*, Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen, Mh. Math. 63 (1959), S. 1—18.

On an Arithmetic Function

By

P. J. McCarthy*, Tallahassee, Florida

(Received August 9, 1958)

The function

$$F(a, m) = \sum_{d \mid m} \mu(d)\, a^{m/d} \tag{1}$$

has been considered by several authors (for references to the older work, see pp. 84—86 of [4]) and recently by L. Carlitz [1], [2]. Here $\mu(d)$ is the Möbius function of d, and a and m are positive integers. A principal result is that for an arbitrary m,

$$F(a, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m). \tag{2}$$

Carlitz [1] has generalized the function (1) by setting

$$F(g, m) = \sum_{d \mid m} \mu(d)\, g(m/d),$$

where $g(m)$ is an arbitrary arithmetic function, and he obtained a necessary and sufficient condition for a result analogous to (2) to hold in this case. It is the purpose of this note to point out that this result holds in a still more general setting.

Let $k \geqq 1$ be an integer and let $g(m)$ be an arithmetic function. We define

$$F_k(g, m) = \sum_{d^k \mid m} \mu(d)\, g(m/d^k).$$

We shall show that certain results of Carlitz generalize to this function.

In our arguments we shall make use of the following simple generalization of the Möbius inversion formula:

If $f(m)$ and $h(m)$ are arithmetic functions then

$$f(m) = \sum_{d^k \mid m} h(m/d^k) \tag{3}$$

if and only if

$$h(m) = \sum_{d^k \mid m} \mu(d)\, f(m/d^k). \tag{4}$$

---

* Florida State University.

To prove this, suppose (3) holds. Then we have

$$\sum_{d^k \mid m} \mu(d)\, f(m/d^k) = \sum_{d^k \mid m} \mu(d) \sum_{e^k \mid \frac{m}{d^k}} h(m/d^k e^k)$$

$$= \sum_{e^k \mid m} \sum_{d^k e^k \mid m} \mu(d)\, h(m/d^k e^k),$$

and if we group all the terms with $ed = t$, this is equal to

$$\sum_{t^k \mid m} \sum_{d \mid t} \mu(d)\, h(m/d^k e^k) = h(m).$$

Conversely, if (4) holds we have

$$\sum_{d^k \mid m} h(m/d^k) = \sum_{d^k \mid m} \sum_{e^k \mid \frac{m}{d^k}} \mu(e)\, f(m/d^k e^k)$$

$$= \sum_{t^k \mid m} \sum_{d \mid t} \mu(t/d)\, f(m/t^k) = f(m).$$

We can now prove that *the relation*

$$F_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m) \tag{5}$$

holds for all positive integers m if and only if for all primes p and all positive integers e and t, with p not dividing t, we have

$$g(p^e t) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^e) \qquad \textit{when } k > e, \tag{6}$$

$$g(p^e t) \equiv g(p^{e-k} t) (\mathrm{mod}\ p^e) \qquad \textit{when } k \leqq e. \tag{7}$$

For, let p be *a* prime and e and n any positive integers with n prime to p. Set $m = p^e n$. Then

$$F_k(g, m) = \begin{cases} \sum_{d^k \mid n} \mu(d)\, g(p^e n/d^k) & \text{when } k > e, \\ \sum_{d^k \mid n} \mu(d)\, \{g(p^e n/d^k) - g(p^{e-k} n/d^k)\} & \text{when } k \leqq e. \end{cases}$$

Thus, if the conditions (6) and (7) are met we will have $F_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^e)$. We can repeat this with each of the distinct primes dividing a given integer m and we will obtain the desired result. If we now apply the above inversion formula to our expressions for $F_k(g, m)$ we obtain

$$\sum_{d^k \mid n} F_k(g, p^e n/d^k) = \begin{cases} g(p^e n) & \text{when } k > e, \\ g(p^e n) - g(p^{e-k} n) & \text{when } k \leqq e, \end{cases}$$

and if we assume that (5) holds for $m = p^e$, then (6) and (7) must hold.

We now give an example of an arithmetic function which satisfies (6) and (7). Let $\sigma_k(m)$ be the sum of the k—*th* powers of all the positive divisors of m. Let p be *a* prime. If a is an integer we can write $a = rk + s$, where r and s are uniquely determined. Define

$$g(p^a) = p^s \sigma_k(p^r),$$

and extend this function to all integers m by requiring that it be multiplicative.

We can generalize another result of Carlitz [1] to the functions $F_k(g, m)$. *Let* $g(1) = 1$ *and assume that* $F_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ *for all positive integers* m. *Let* $w(m)$ *be another arithmetic function and set*

$$W_k(g, m) = \sum_{d^k \mid m} w(d)\, g(m/d^k).$$

Then $W_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ *for all positive integers* m *if and only if*

$$\sum_{d \mid m} w(d) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m^k) \tag{8}$$

for all positive integers m.

For, suppose (8) holds for all positive integers m. Then, by the inversion formula which we have proved, we have

$$\begin{aligned} W_k(g, m) &= \sum_{d^k \mid m} w(d) \sum_{e^k \,\mid\, \frac{m}{d^k}} F_k(g, m/d^k e^k) \\ &= \sum_{t^k \mid m} F_k(g, m/t^k) \sum_{d \mid t} w(d) \\ &\equiv 0 (\mathrm{mod}\, m). \end{aligned}$$

Now assume that $W_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ for all positive integers m. We shall verify (8) by induction on m. It is certainly true when $m = 1$ and we now assume that it is true for all integers less than some fixed m. Then from the relation in the first part of the paragraph, with m replaced by m^k, we have

$$F_k(g, 1) \sum_{d \mid m} w(s) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m^k).$$

Since $F_k(g, 1) = g(1) = 1$, we see that (8) holds true for m.

An example of a function which satisfies (8), other than the Möbius function, is the function $\phi_k(m)$ studied by E. Cohen in [3] (see Theorem 1 of [3]). This function is equivalent to the Jordan function.

References

[1] *L. Carlitz*, An arithmetic function, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 43 (1937), pp. 271—276.

[2] *L. Carlitz*, Note on an arithmetic function, Amer. Math. Monthly, vol. 59 (1952), pp. 386—387.

[3] *E. Cohen*, Some totient functions, Duke Math. J., vol. 23 (1956), pp. 515 — 522.

[4] *L. E. Dickson*, History of the Theory of Numbers, vol. 1, Washington, 1919.

Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik

Von

Hans Robert Müller, Berlin

(Eingegangen am 5. September 1958)

In den technischen Anwendungen der Kinematik, insbesondere in der Getriebelehre bei der Herstellung von Kurvengetrieben und in der Verzahnungslehre bei der Ermittlung zusammengehöriger Zahnflanken spielen kinematisch erzeugte Hüllgebilde eine wichtige Rolle.

In der ebenen Kinematik kann unter Verwendung komplexer Zahlen das Aufsuchen von Hüllkurvenpaaren C, C' eines zwangläufigen Bewegungsvorgangs auf die Auflösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden. Man kann also sämtliche in Gang- bzw. Rastebene befestigten Hüllkurvenpaare explizit anschreiben. Hierbei führt man das Verhältnis der Geschwindigkeiten, mit denen der augenblickliche gemeinsame Berührungspunkt X von C und C' bzw. diese Kurven durchläuft, als *Rollgleitzahl* λ ein und denkt sich diese Größe $\lambda = \lambda(t)$ als Funktion der Zeit t vorgegeben[1].

Im Gegensatz hierzu führt in der sphärischen Kinematik das Aufsuchen von Hüllkurvenpaaren zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in Vektorschreibweise, also eigentlich zu einem System von drei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, die mittels einer stereographischen Projektion und nachfolgendem Übergang zu Minimalkoordinaten in eine einzige *Riccati*'sche Differentialgleichung und deren Konjugierte transformiert werden kann. Eine vollständige Integration und damit explizite Darstellung sämtlicher Hüllkurvenpaare ist daher für die eingliedrigen Bewegungsvorgänge auf der Kugel im allgemeinen nicht möglich. In Sonderfällen kann

---

[1] *H. R. Müller*, Zur Kinematik des Rollgleitens. Arch. der Math. 4, 239—246 (1953).

jedoch etwa durch Angabe spezieller Lösungen die Integration vollständig durchgeführt werden, wie z. B. bei konstanter Rollgleitzahl λ für das sphärische Verzahnungsproblem (Kegelräder)[2].

Im folgenden wird nun in ähnlicher Weise, wie in der Ebene und auf der Kugel, für einen räumlichen zwangläufigen Bewegungsvorgang das Problem des Aufsuchens zusammengehöriger Hüllflächenpaare behandelt und das hierbei auftretende System von partiellen Differentialgleichungen untersucht.

Zwecks Festlegung eines eingliedrigen oder zwangläufigen Bewegungsvorgangs im Raum denken wir uns das bewegliche System (Gangraum) durch ein rechtwinkeliges Dreibein $\{O; \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ von Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_j$ dargestellt. Ein ebensolches Dreibein $\{O'; \mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \mathfrak{e}_3'\}$ repräsentiere den Rastraum, werde also als fest angenommen. Der Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathfrak{e}_j$ und $\mathfrak{e}_j'$ ist dann durch eine lineare Transformation

$$\mathfrak{e}_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\, \mathfrak{e}_k' \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

mit eigentlich orthogonaler Matrix $\| a_{jk} \|$ gegeben, die der Drehung der beiden Achsenkreuze gegen einander entspricht. Die Scheitelpunkte O, O' der beiden Dreibeine sind durch den Vektor

$$\overrightarrow{O'O} = \mathfrak{u} = \mathfrak{e}_1 u_1 + \mathfrak{e}_2 u_2 + \mathfrak{e}_3 u_3 \tag{2}$$

verbunden. Sind die a_{jk} und u_j genügend oft stetig differentierbare Funktionen eines reellen Parameters t (Zeit) mit gemeinsamem Definitionsbereich, so wird durch die gegenseitigen Lagen von $\{O; \mathfrak{e}_j\}$ und $\{O'; \mathfrak{e}_j'\}$ ein einparametriger Bewegungsvorgang im Raum bestimmt.

Für den Drehbestandteil unseres Bewegungsvorgangs finden wir wegen

$$\mathfrak{e}_j\, \mathfrak{e}_k = \delta_{jk} \tag{3}$$

ein schiefsymmetrisches System von Ableitungsgleichungen

$$\frac{d\,\mathfrak{e}_i}{dt} = \dot{\mathfrak{e}}_i = \mathfrak{e}_j\, \omega_k - \mathfrak{e}_k\, \omega_j \tag{4}$$

mit zyklischen Anordnungen i, j, k der Zahlen 1, 2, 3. Nach Einführung des Vektors (Drehvektor)

$$\omega = \mathfrak{e}_1 \omega_1 + \mathfrak{e}_2 \omega_2 + \mathfrak{e}_3 \omega_3 \tag{5}$$

[2] *H. R. Müller*, Zur Kinematik des Rollgleitens, II (Sphärisches Rollgleiten). Arch. der Math. 6, 471–480 (1955).

kann statt (4) auch kurz das Vektorprodukt

$$\dot{e}_j = \omega \times e_j \tag{6}$$

geschrieben werden. Der Schiebbestandteil des Bewegungsvorgangs wird durch die Ableitung von (2) zum Ausdruck gebracht:

$$\dot{u} = \overline{\omega} = e_1 \overline{\omega}_1 + e_2 \overline{\omega}_2 + e_3 \overline{\omega}_3. \tag{7}$$

Die sechs Funktionen $\omega_j, \overline{\omega}_j$ kennzeichnen unseren Bewegungsvorgang im Kleinen, sie bestimmen die Momentanschraube $\{\omega, \overline{\omega}\}$. Hierbei gibt der Vektor ω die Richtung der Achse an und bedeutet $\overline{\omega}$ deren Momentvektor bezüglich des Ursprunges O. Der Bewegungsvorgang ist im Augenblick eine infinitesimale Schraubung um die Achse mit dem Parameter

$$k = \frac{\omega\,\overline{\omega}}{\omega^2}$$

Zu einem Punkte X des Raumes gehören die Vektoren

$$\overrightarrow{OX} = \mathfrak{x} = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3, \tag{8}$$

$$\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = \mathfrak{u} + \mathfrak{x} = \mathfrak{x}'. \tag{9}$$

Durch Ableitung nach der Zeit t finden wir daraus wegen (6) und (7) den Vektor der Relativgeschwindigkeit

$$\mathfrak{x}_{(R)} = \dot{\mathfrak{x}} = e_1 \dot{x}_1 + e_2 \dot{x}_2 + e_3 \dot{x}_3, \tag{10}$$

sowie den Vektor der Absolutgeschwindigkeit

$$\mathfrak{x}_{(A)} = \overline{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{x}_{(R)}. \tag{11}$$

Letztere Formel beinhaltet das Gesetz

$$\mathfrak{x}_{(A)} = \mathfrak{x}_{(F)} + \mathfrak{x}_{(R)} \tag{12}$$

von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, da

$$\mathfrak{x}_{(F)} = \overline{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}) \tag{13}$$

die (vektorielle) Führungsgeschwindigkeit des Punktes X darstellt, also die Geschwindigkeit jenes im Gangsystem festen Punktes, der zum betrachteten Zeitpunkt sich mit X deckt.

Um nun Paare von zusammengehörigen Hüllflächen zu finden, denken wir uns im Gangraum eine Fläche Φ angebracht. Bei unserem Bewegungsvorgang hüllt sie bei entsprechenden Voraussetzungen über ihre Glätte, stetige Krümmung usf. im allgemeinen eine Fläche Φ' des Rastraumes ein, und zwar erfolgt die Berührung zu jedem Zeitpunkt t

im allgemeinen längs einer Kurve $K(t)$, die auch als Charakteristik bezeichnet wird. Von einer Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t, u) \tag{14}$$

dieser Kurve $K(t)$ im Gangsystem gehen wir nun aus. Bei Variieren von u allein, durchläuft also der Punkt X diese Kurve. Ändern sich beide Parameter t und u, so liefert (14) eine Parameterdarstellung der Ausgangsfläche Φ. Die Hüllfläche Φ' wird im festen System dann durch (9) erfaßt. Hält man hingegen u fest, so beschreibt der Punkt X auf Φ bzw. auf Φ' je eine Bahnkurve, die wir mit C bzw. C' bezeichnen wollen. Hierbei stellt die Relativgeschwindigkeit

$$\mathfrak{x}_{(R)} = \mathfrak{x}_t = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \tag{15}$$

auch die Geschwindigkeit des Punktes X gegenüber der Fläche Φ, also die Geschwindigkeit, mit der C von X durchlaufen wird, dar. Entsprechend wird C' mit der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{x}_{(A)}$, also der Geschwindigkeit von X gegenüber Φ' beschrieben. Schließlich bedeutet

$$\mathfrak{x}_u = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}$$

den Tangentenvektor an die Charakteristik K im Punkte X. Die drei Vektoren $\mathfrak{x}_{(R)}$, $\mathfrak{x}_{(A)}$ und $\mathfrak{x}_u$ liegen nun in einer gemeinsamen Tangentialebene der beiden Flächen Φ, Φ'. Es besteht somit eine Beziehung der Art

$$\mathfrak{x}_{(R)} = \lambda . \mathfrak{x}_{(A)} + \mu . \mathfrak{x}_u \tag{16}$$

mit skalaren Funktionen $\lambda = \lambda(t, u)$, $\mu = \mu(t, u)$, die im allgemeinen nicht ständig verschwinden und der Rollgleitzahl der ebenen und sphärischen Kinematik entsprechen. Führen wir nun nach (11), (12) und (15) die Werte für Relativ- und Absolutgeschwindigkeiten ein, so gelangen wir zu

$$P . \mathfrak{x}_t + Q . \mathfrak{x}_u = \overline{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}) \tag{17}$$

mit den Abkürzungen

$$P = \frac{1 - \lambda}{\lambda}, Q = -\frac{\mu}{\lambda}. \tag{18}$$

Die Bedingung (17) stellt nun eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in Vektorschreibweise zur Bestimmung von Hüllflächenpaaren Φ, Φ' dar, wenn wir uns λ und μ und damit auch P und Q als Funktionen von t und u vorgegeben denken. Ausführlich geschrieben stellt (17) natürlich wiederum ein System von drei solchen partiellen Differentialgleichungen dar.

Mit der Lösung des Systems (17) verbinden wir das zugehörige *homogene Problem*, nämlich die Differentialgleichung

$$P.\mathfrak{x}_t + Q.\mathfrak{x}_u = \omega \times \mathfrak{x} \tag{19}$$

zu lösen. Der Vergleich mit der sphärischen Kinematik ergibt[2], daß wir dort eine ähnlich gebaute gewöhnliche Differentialgleichung, jedoch mit der wesentlichen Einschränkung

$$\mathfrak{x}^2 = \text{konst.}$$

zu behandeln hatten. Wir müssen daher danach trachten, die dort geübte Transformation geeignet zu modifizieren.

Aus (19) folgt unmittelbar durch skalare Multiplikation mit dem Vektor $\mathfrak{x}$

$$P.(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_t) + Q.(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u) = 0. \tag{20}$$

Führt man für den Betrag des Vektors $\mathfrak{x}$ die Bezeichnung

$$X = X(t, u) = \sqrt{\mathfrak{x}^2} \tag{21}$$

ein, dann kann statt (20) auch

$$P.X_t + Q.X_u = 0 \tag{22}$$

geschrieben werden. In bekannter Weise suchen wir die zugehörigen Charakteristiken dieser einfachen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dt : du = P : Q,\ dX = 0. \tag{23}$$

Ihre allgemeinen Lösungen seien

$$\Phi(t, u) = C_1 = \text{konst.},\ X = C_2 = \text{konst.} \tag{24}$$

Die allgemeine Lösung von (22) hat dann die Gestalt

$$C_2 = \Psi(C_1)$$

oder

$$X = \Psi(\Phi(t, u)), \tag{25}$$

wobei Ψ eine willkürliche Funktion ihres Argumentes ist.

Unter Verwendung dieser Lösung X von (22) führen wir nun folgende Transformation ein[3]:

[3] Man kann diese Transformation geometrisch deuten und sich hierzu in drei Schritten durchgeführt denken: a) Die Punkte des Raumes werden aus dem Ursprung des Koordinatensystems auf die Einheitskugel um diesen Punkt projiziert. b) Die so erhaltenen Kugelpunkte werden durch stereographische Projektion aus dem Zentrum (0, 0, 1) auf die Punkte der Ebene $x_3 = 0$ abgebildet. c) In dieser Ebene werden die cartesischen Koordinaten zu Minimalkoordinaten zusammengefaßt. ξ und η sind diese Minimalkoordinaten.

$$\xi = \frac{x_1 + i\,x_2}{X - x_3}, \quad \eta = \frac{x_1 - i\,x_2}{X - x_3}. \tag{26}$$

Umgekehrt hängen die neuen Veränderlichen ξ, η, X mit den auf das Gangsystem bezogenen cartesischen Koordinaten so zusammen:

$$x_1 = \frac{\xi + \eta}{\xi\eta + 1} \cdot X, \; x_2 = -\,i\,\frac{\xi - \eta}{\xi\eta + 1} \cdot X, \; x_3 = \frac{\xi\eta - 1}{\xi\eta + 1} \cdot X. \tag{27}$$

Die Umrechnung der Differentialgleichung (19) auf die neuen Veränderlichen kann etwa dadurch vorgenommen werden, daß man erst die partiellen Ableitungen von (26) nach t und u berechnet und dann die Ausdrücke $P \,.\, \xi_t + Q \,.\, \xi_u$ bzw. $P \,.\, \eta_t + Q \,.\, \eta_u$ bildet. Wegen (19), (22), (27) findet man schließlich die beiden konjugierten Differentialgleichungen

$$P \,.\, \xi_t + Q \,.\, \xi_u = -\,\frac{\omega_2 + i\,\omega_1}{2} \cdot \xi^2 + i\,\omega_3\,\xi - \frac{\omega_2 - i\,\omega_1}{2}, \tag{28}$$

$$P \,.\, \eta_t + Q \,.\, \eta_u = -\,\frac{\omega_2 - i\,\omega_1}{2} \cdot \eta^2 - i\,\omega_3\,\eta - \frac{\omega_2 + i\,\omega_1}{2}. \tag{29}$$

Man hat somit das homogene System (19) von drei partiellen Differentialgleichungen, das wir in (19) nur vektoriell geschrieben hatten, nach Lösung von (22) im wesentlichen auf eine einzige partielle Differentialgleichung zurückgeführt, die als Verallgemeinerung der gewöhnlichen *Riccati*schen Differentialgleichung anzusprechen ist. Wir schreiben diese partielle Differentialgleichung kurz in der Form

$$P \,.\, \xi_t + Q \,.\, \xi_u = R(t, \xi), \tag{30}$$

bezeichnen also die rechte Seite von (28) mit $R = R(t, \xi)$. Bei Bestimmung ihrer Charakteristiken aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dt : du : d\xi = P : Q : R \tag{31}$$

stößt man im allgemeinen auf eine gewöhnliche *Riccati*sche Gleichung, sowie die schon früher behandelte Gleichung (23).

Damit ist in gewisser Hinsicht der Schwierigkeitsgrad unserer Aufgabe gekennzeichnet: Eine allgemeine Integration bereits des homogenen Problems ist im allgemeinen nicht möglich, auch wenn die Gleichung (23) elementar integrierbar sein sollte. Es muß daher unser Bestreben sein, im Einzelfalle dieser *Riccati*schen Differentialgleichung etwa durch

Aufsuchen spezieller Lösungen oder durch Überführung in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von vielleicht wohl bekanntem Typus beizukommen.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (17) kann nun als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (19) dargestellt werden. Man wird daher trachten, nach Erledigung des homogenen Problems mit Hilfe von unbestimmten Ansätzen oder dgl. eine solche spezielle Lösung von (17) zu finden.

Können jedoch drei unabhängige spezielle Lösungen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ des homogenen Problems angegeben werden, so ist auch eine Behandlung des inhomogenen Problems nach der Methode der „Variation der Konstanten" möglich: Diese Lösungen $\mathfrak{x}_j$ müssen also (19) oder

$$P \cdot \mathfrak{x}_{jt} + Q \cdot \mathfrak{x}_{ju} = \omega \times \mathfrak{x}_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{32}$$

erfüllen und einem Hauptsystem entsprechen, d. h. es darf ihre Determinante nicht verschwinden:

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \neq 0. \tag{33}$$

In den Veränderlichen ξ, η, X lautet wegen (26), (27) diese Bedingung

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \xi_1 \eta_1 - 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \xi_2 \eta_2 - 1 \\ \xi_3, & \eta_3, & \xi_3 \eta_3 - 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{34}$$

Mit dem Ansatz

$$\mathfrak{x} = C_1 \mathfrak{x}_1 + C_2 \mathfrak{x}_2 + C_3 \mathfrak{x}_3 \tag{35}$$

geht man nun in die inhomogene Gleichung (17) ein und gelangt wegen (32) auf das lineare Gleichungssystem (drei lineare inhomogene Gleichungen):

$$\sum_{j=1}^{3} (P C_{jt} + Q C_{ju}) \mathfrak{x}_j = \bar{\omega}. \tag{36}$$

Zufolge (33) kann man nun daraus die Ausdrücke

$$P C_{jt} + Q C_{ju} = F_j(t, u) \tag{37}$$

berechnen und gelangt so wiederum zu drei linearen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die „variierten Konstanten" C_j. Die zugehörigen Charakteristiken sind durch

$$dt : du : dC_j = P : Q : F_j \tag{38}$$

bestimmt. Hierbei ist natürlich die Lösung des ersten Teiles dieser

fortlaufenden Proportion schon von früher her bekannt. (Vgl. (23), (24)). Die Ausdrücke für die allgemeinen Integrale der C_j liefern, in (35) eingesetzt, das allgemeine Integral des inhomogenen Problems und damit die Hüllflächen unseres Bewegungsvorgangs im Gangraum.

Ist im besonderen ständig

$$Q = O \text{ für } \lambda \neq O,\ \mu = O$$

und damit naturgemäß wegen (16) die Größe λ nur eine Funktion von t allein, so erhalten wir zwei Kurven C, C', die sich bei unserem Bewegungsvorgang einhüllen: Es sind dies die sogenannten *Gleitkurven* oder *assoziierte Kurven*, die bereits von *G. Koenigs* betrachtet wurden[4]. Diese Kurven sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\mathfrak{x}} = L(\bar{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}))$$

mit

$$L = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Ihre Darstellung kann in obiger Weise auf Quadraturen zurückgeführt werden, wenn die *Riccati*sche Differentialgleichung des homogenen Problems gelöst ist, d. h. drei unabhängige Integrale auffindbar sind.

Als einfaches Beispiel bietet sich die Behandlung der *Hypoidgetriebe* an. Die auf einander schrotenden Achsenflächen sind zwei einschalige Drehhyperboloide; bei geeigneter Wahl von Gang- und Rastkreuz besitzen sie die Gleichungen[5]

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{x'}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\alpha'}\right)^2 - \left(\frac{z'}{\beta'}\right)^2 = 1$$

und nimmt das System (17) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} P\,x_t + Q\,x_u &= \bar{a}\cos nt + a\,z\sin nt - b\,y, \\ P\,y_t + Q\,y_u &= \bar{a}\sin nt + b\,x - a\,z\cos nt, \\ P\,z_t + Q\,z_u &= \bar{b} + a\,y\cos nt - a\,x\sin nt. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Hierbei wurde gesetzt:

---

[4] *G. Koenigs*, Mémoire sur les courbures conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides (1910). Veröffentlicht in den Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sc. 35, 2e sér., Paris, 1914, n° 1, 1—215.

[5] Wir schreiben zur Abkürzung: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ usf.

$$a = n' \sin(\varrho - \varrho'),\ b = n' \cos(\varrho - \varrho') - n,$$

$$\bar{a} = n'(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}') \cos(\varrho - \varrho'),\ \bar{b} = -n'(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}') \sin(\varrho - \varrho')$$

und gilt

$$\alpha = \bar{\varrho},\ \alpha' = \bar{\varrho}',\ \beta = \beta' = \bar{\varrho} \operatorname{ctg} \varrho = \bar{\varrho}' \operatorname{ctg} \varrho',$$

sowie

$$n \sin \varrho = n' \sin \varrho'.$$

Soll der so erklärte Bewegungsvorgang *geschlossen* sein, müssen überdies n, n' ganzzahlig und relativ prim sein[6].

Das homogene Problem führt gemäß (28) auf die partielle Differentialgleichung:

$$P \xi_t + Q \xi_u = -i \frac{a}{2} e^{-int} \xi^2 + i b \xi + i \frac{a}{2} e^{int} = R. \tag{40}$$

Für den Fall, daß P und Q *konstant* sind, nimmt (24) die einfache Form

$$Q t - P u = C_1 \tag{41}$$

an und kann die gewöhnliche *Riccati*sche Differentialgleichung durch Angabe einer speziellen Lösung vollständig integriert werden[7]. Ein anderer Integrationsweg wird durch Zurückführung der *Riccati*schen Differentialgleichung auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben. Man gelangt nämlich dann zu einer solchen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Als Lösung finden wir schließlich

$$\xi = \frac{1 + k\, W e^{i(n+p)t}}{-k + W e^{i(n+p)t}} \cdot e^{int}, \tag{42}$$

worin

$$W = W(Qt - Pu) \tag{43}$$

eine willkürliche Funktion von $Qt - Pu$ ist, k eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$a k^2 + 2(nP - b) k - a = 0 \tag{44}$$

bedeutet und zur Abkürzung

$$p = \frac{1}{P}(ak - b) \tag{45}$$

gesetzt wurde.

Mit einer weiteren willkürlichen Funktion

---

[6] Vgl. hierzu auch *H. R. Müller*, Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Mh. Mathem. **55**, 206—214 (1951).

[7] Vgl. die in Fußnote [2] genannte Arbeit.

$$X = \Psi(Qt - Pu) \tag{46}$$

des Argumentes $Qt - Pu$ ergibt sich schließlich nach (27) die allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2k(W^2-1)\cos nt + 2W\cos pt - 2W\,k^2\cos(2n+p)\,t}{(W^2+1)\,(k^2+1)} \cdot \Psi, \\ y &= \frac{2k(W^2-1)\sin nt - 2W\sin pt - 2W\,k^2\sin(2n+p)\,t}{(W^2+1)\,(k^2+1)} \cdot \Psi, \\ z &= \frac{(W^2-1)\,(k^2-1) + 4W\,k\cos(n+p)\,t}{(W^2+1)\,(k^2+1)} \cdot \Psi. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Für $W = 0$ und $W = 1$, sowie $\Psi = 1$ ergeben sich daraus zwei spezielle Lösungen, die wir mit $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_1$ bezeichnen wollen. Das allgemeine Integral (47) kann dann auch in der Form

$$\mathfrak{x} = [(1 - W^2)\,\mathfrak{x}_0 + 2W\,\mathfrak{x}_1]\frac{\Psi}{1+W^2} = [\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1\,sh\,U] \cdot \frac{\Psi}{ch\,U} \tag{48}$$

mit

$$W = th\frac{U}{2} \tag{49}$$

geschrieben werden. Daraus entnehmen wir, daß sich in diesem Beispiel keine drei unabhängigen Lösungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ mit

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \neq 0$$

angeben lassen, also die Methode der Variation der Konstanten zur Behandlung des inhomogenen Systems (39) nicht anwendbar ist.

Man kann jedoch leicht ein spezielles Integral von (39) mittels des Ansatzes

$$\left.\begin{aligned} x &= \;\; L\sin nt + M\,u\cos nt, \\ y &= -L\cos nt + M\,u\sin nt, \\ z &= \;\; N\,u \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

finden und die Konstanten L, M, N durch Einsetzen in (39) ermitteln, d. h. durch a, $\bar{a}$ usf. ausdrücken. Diese spezielle Lösung ist ein einschaliges Drehhyperboloid mit der Gleichung

$$N^2(x^2 + y^2) - M^2 z^2 = L^2 N^2.$$

Die Summe von (47) und (50) stellt nun das allgemeine Integral des Systems (39), also sämtliche Flanken von Hypoidgetrieben bei konstanten Größen P und Q dar.

Remarks on an Existence Theorem in Matrix Theory Due to A. Horn

By

L. Mirsky, Sheffield

(Received September 11, 1958)

1. In an interesting paper [2] published a few years ago, *A. Horn* solved the following two problems.

(A) To determine necessary and sufficient conditions for the existence of a matrix with prescribed characteristic roots and singular values.

(B) To determine necessary and sufficient conditions for the existence of a positive definite hermitian matrix with prescribed characteristic roots and prescribed values for a chain of principal minors.

In *Horn*'s treatment, the discussion of (B) was based on that of (A). Since, however, the solution of (A) was relatively hard, it may be of some interest to make (B) independent of (A) by exhibiting its solution as an almost immediate consequence of two simple lemmas recently proved by me [3] in connection with another existence problem.

2. Our notation is as follows. If $x_1, \ldots, x_n$ are any real numbers, then $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ denote these numbers arranged in non-ascending order of magnitude. If the sets of numbers $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$ satisfy the relations

$$\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_k \begin{cases} \leqslant \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k & (1 \leqslant k < n) \\ = \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k & (k = n), \end{cases}$$

we shall write

$$(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n).$$

We shall say that the numbers $z_1, \ldots, z_{n-1}$ *separate* $x_1, \ldots, x_n$ if

$$\bar{x}_1 \geqslant \bar{z}_1 \geqslant \bar{x}_2 \geqslant \bar{z}_2 \geqslant \ldots \geqslant \bar{z}_{n-1} \geqslant \bar{x}_n.$$

The transpose of A will be denoted by A^T, and the transposed conjugate by A^*. The *singular values* of a square matrix A are defined as the non-negative square roots of the characteristic roots of $A^* A$. The $k \times k$

submatrix standing in the upper left-hand corner of A will be denoted by $[A]_k$.

3. Two preliminary results will be needed.

LEMMA 1. *If* $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n)$, *then there exist numbers* $c_1, \ldots, c_{n-1}$ *which separate* $b_1, \ldots, b_n$ *and satisfy the relation*

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) < (c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

This is a very slight generalization of [3, Lemma 1], and only trifling changes have to be made in the proof.

LEMMA 2. *Let* A *be a real symmetric* $(n-1) \times (n-1)$ *matrix with characteristic roots* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. *If* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ *separate the numbers* $\omega_1, \ldots, \omega_n$, *then, by bordering* A *with an additional row and column, we can obtain a real symmetric* $n \times n$ *matrix with characteristic roots* $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

This result is an obvious consequence of [3, Lemma 2]. An independent proof of essentially the same statement has also been given by *Fan* and *Pall* [1, § 2].

4. We are now able to discuss the solution of problem (B).

THEOREM. (i) *Let* H *be a positive definite hermitian matrix. If* $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ *are its characteristic roots and if the* (*positive*) *numbers* $r_1, \ldots, r_n$ *are defined by the equations*

$$r_1 \ldots r_k = \det [H]_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{1}$$

then

$$\bar{r}_1 \ldots \bar{r}_k \begin{cases} \leqslant \omega_1 \ldots \omega_k & (1 \leqslant k < n) \\ = \omega_1 \ldots \omega_k & (k = n). \end{cases} \tag{2}$$

(ii) *Conversely, if* $\omega_1 \ldots, \omega_n$, $r_1, \ldots, r_n$ *are given positive numbers such that* $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ *and* (2) *holds, then there exists a* (*positive definite*) *hermitian* (*and, indeed, a real symmetric*) *matrix* H, *with characteristic roots* $\omega_1, \ldots, \omega_n$, *which satisfies* (1).

Horn's proof of (i) depends on *Weyl*'s inequalities for characteristic roots and singular values [4, equation (4)] and only occupies a few lines. It remains to consider (ii).

For $n = 1$ the assertion is true trivially. Assume that it holds for $n - 1$; and let $\omega_1, \ldots, \omega_n$, $r_1, \ldots, r_n$ be given positive numbers such that $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ and (2) is satisfied, i.e.

$$(\log r_1, \ldots, \log r_n) < (\log \omega_1, \ldots, \log \omega_n).$$

Hence, by Lemma 1, there exist numbers $c_1, \ldots, c_{n-1}$ which separate $\log \omega_1, \ldots, \log \omega_n$ and satisfy

$$(\log r_1, \ldots, \log r_{n-1}) < (c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

Putting $\alpha_k = \exp c_k$ $(1 \leqslant k < n)$, we see that $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ separate $\omega_1, \ldots, \omega_n$ and that

$$(\log r_1, \ldots, \log r_{n-1}) < (\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_{n-1}). \tag{3}$$

By the induction hypothesis and (3), we now infer the existence of a real symmetric $(n-1) \times (n-1)$ matrix A with characteristic roots $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ and such that

$$r_1 \ldots r_k = \det [A]_k \qquad (1 \leqslant k < n).$$

By Lemma 2, we can add a row and a column to A in such a way as to obtain a real symmetric $n \times n$ matrix H with characteristic roots $\omega_1, \ldots, \omega_n$. This matrix clearly meets our requirements.

5. In conclusion we observe that, once problem (B) has been solved, the solution of (A) is easy. This is already implicit in *Horn*'s paper, and we repeat the essential step in his argument for the convenience of the reader. We shall, in fact, show that *if* $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ *and* $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ *are positive real numbers such that*

$$\lambda_1 \ldots \lambda_k \begin{cases} \leqslant \mu_1 \ldots \mu_k & (1 \leqslant k < n) \\ = \mu_1 \ldots \mu_k & (k = n), \end{cases}$$

then there exists a matrix with characteristic roots $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *and singular values* $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Now, by the theorem just proved, there exists a real symmetric matrix H with characteristic roots $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ and such that

$$\lambda_1^2 \ldots \lambda_k^2 = \det [H]_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Since H is positive definite, there exists an upper triangular matrix P with positive diagonal elements and such that $H = P^T P$. It is now easily verified that the diagonal elements of P must be $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; and it therefore follows that P has the requisite properties.

References

1. *K. Fan* and *G. Pall*, Imbedding conditions for hermitian and normal matrices. Canad. J. Math. **9**, 298–304 (1957).

2. *A. Horn*, On the eigenvalues of a matrix with prescribed singular values. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 4–7 (1954).

3. *L. Mirsky*, Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements. J. London Math. Soc. **33**, 14–21 (1958).

4. *H. Weyl*, Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation. Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 408–411 (1949).

The University, Sheffield.

Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations

Par

Solomon Marcus, Bucarest

(Reçu le 19 septembre 1958)

1. Soit E un ensemble et supposons qu'on a défini une relation qui associe à chaque élément x de E un sous-ensemble $S(x)$ de E, tel que $x \notin S(x)$. Deux éléments distincts de E, x et y, sont dits *indépendants*, si $x \notin S(y)$ et $y \notin S(x)$. Un sous-ensemble F de E est dit *indépendant* si possède un seul élément ou si F possède au moins deux éléments et deux éléments arbitraires de F sont indépendants.

En 1935 *P. Turán* a fait l'hypothèse suivante: Si E est l'ensemble de tous les nombres réels et si, pour chaque $x \in E$, l'ensemble $S(x)$ est fini, alors il existe un ensemble indépendant et infini. Par une voie élémentaire, *G. Grünwald* a démontré en 1937 que l'hypothèse de *P. Turán* est vraie. L'ensemble indépendant construit par *G. Grünwald* est dénombrable [9]. Mais déjà en 1936 *D. Lázár* a démontré que, dans les conditions de *P. Turán*, il existe un ensemble indépendant ayant la puissance du continu [12].

En 1950, *G. Fodor* a généralisé le résultat de *D. Lázár*, en démontrant que si E est l'ensemble des nombres réels et si, pour chaque $x \in E$, on a $x \notin \overline{S(x)}$, alors il existe un ensemble indépendant ayant la puissance du continu [6]. En 1951 *G. Fodor* démontre que, dans les mêmes hypothèses que ci-dessus, il existe un ensemble indépendant de mesure extérieure positive [7]. Si, en outre, la fonction $f(x) =$ distance de x à $S(x)$ est mesurable et positive, alors il existe un ensemble indépendant mesurable et de mesure positive [6]. Mais il est possible qu'il n'existe aucun ensemble indépendant de mesure positive [8].

En 1956, *F. Bagemihl* a obtenu les analogues descriptifs (en termes de la catégorie de *Baire*) de certains des résultats de *G. Fodor*. Il a démontré, par exemple, que si E est l'ensemble des nombres réels et si pour chaque $x \in E$ on a $x \notin \overline{S(x)}$, alors il existe un ensemble indépendant

de deuxième catégorie mais il est possible qu'il n'existe aucun ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle [1].

Enfin, en 1956 et 1957, *P. Erdös* et *G. Fodor* ont donné des vastes généralisations et certaines améliorations des résultats ci-dessus ([3], [4]). Nous citons le résultat suivant, qui représente la réponse la plus complète au problème posé par *P. Turán*: Si E est l'ensemble des nombres réels et si, pour chaque $x \in E$, l'ensemble $S(x)$ est fini, alors il existe un ensemble indépendant de deuxième catégorie dans chaque intervalle et dont l'intersection avec chaque intervalle est de mesure extérieure égale à la longueur de cet intervalle.

Dans ce qui suit, nous nous proposons, d'une part, d'obtenir par un procédé uniforme certains des résultats ci-dessus, d'autre part d'apporter quelques améliorations et d'ajouter quelques résultats et remarques concernant la structure des ensembles indépendants lorsque on connaît celle des ensembles $S(x)$.

2. Si, pour chaque $x \in E$, on a $x \in \overline{S(x)}$, alors, d'après les résultats cités ci-dessus, il existe un ensemble indépendant de mesure extérieure positive et un ensemble indépendant de deuxième catégorie. Si, en outre, la distance de x à $S(x)$ est une fonction mesurable, alors il existe un ensemble indépendant mesurable et de mesure positive. Chacun de ces théorèmes est démontré par l'auteur respectif par une autre voie. Mais on peut, par un raisonnement *uniforme*, obtenir tous ces trois théorèmes et aussi un autre, à savoir l'analogue descriptif du théorème de *G. Fodor* de [6]. En effet, soit A_n l'ensemble des points x tels que $f(x)$ ($f(x)$ désignera toujours la distance de x à $S(x)$) soit supérieure à $\frac{1}{n}$. Puisque $f(x)$ est toujours positive, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$ (E désignera toujours, dans ce travail, l'ensemble des nombres réels). Il existe donc un p tel que A_p soit de deuxième catégorie et un r tel que A_r soit de mesure extérieure positive. Mais alors il existe un intervalle I_p, de longueur inférieure à $\frac{1}{p}$, où A_p est de deuxième catégorie et un intervalle I_r, de longueur inférieure à $\frac{1}{r}$, où A_r est de mesure extérieure positive. Il est aisé de voir que les ensembles $A_p \cap I_p$ et $A_r \cap I_r$ sont indépendants.

Supposons maintenant que $f(x)$ est mesurable (resp. jouit de la propriété de *Baire*). En ce cas A_r (resp. A_p) est mesurable (resp. jouit

de la propriété de *Baire*), donc $A_r \cap J_r$ est un ensemble indépendant de mesure positive (resp. I_p contient un intervalle J_p tel que $A_p \cap J_p$ soit un ensemble indépendant de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de *Baire*).

Comme application du raisonnement ci-dessus, on peut retrouver le théorème de *Lázár* et *Fodor* sur l'existence d'un ensemble indépendant ayant la puissance du continu. Il suffit pour cela de remarquer que, en vertu du théorème de *König* de la théorie des ensembles, il existe un s tel que A_s ait la puissance du continu et il existe un intervalle I_s de longueur inférieure à $\frac{1}{s}$, tel que $A_s \cap I_s$ ait aussi la puissance du continu. (On choisit pour I_s un intervalle qui contient un point de condensation de A_s). L'ensemble $A_s \cap I_s$ est indépendant.

3. D'après les résultats de *Fodor* et *Bagemihl* ([8], [1]), il est possible que, pour chaque $x \in E$, $S(x)$ soit formé d'un seul élément au plus, sans qu'existe un ensemble indépendant de mesure positive ou qui soit un résiduel dans un certain intervalle. On peut obtenir un théorème qui contient comme cas particuliers les résultats de *Fodor* et *Bagemihl*, à savoir nous donnons *un exemple où $S(x)$ est formé d'un seul élément au plus et tel qu'il n'existe aucun ensemble parfait et indépendant.* En effet, soit Ω_0 le nombre ordinal initial qui correspond à la puissance du continu. Rangeons tous les ensembles parfaits de la droite dans une suite du type Ω_0:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots (\xi < \Omega_0).$$

Soit π_1 et ϱ_1 deux éléments distincts de P_1. Supposons qu'on a choisi dans chaque P_α, pour $\alpha < \xi$, deux éléments π_α et ϱ_α distincts de tous les éléments choisis dans les ensembles $P_\beta (1 \leqslant \beta < \alpha)$. Puisque l'ensemble

$$A_\xi = \{\pi_1, \varrho_1, \pi_2, \varrho_2, \ldots, \pi_\alpha, \varrho_\alpha, \ldots\} \qquad (1 \leqslant \alpha < \xi)$$

est de puissance inférieure à celle du continu, on peut choisir dans P_ξ deux éléments π_ξ et ϱ_ξ qui n'appartiennent pas à A_ξ. Posons maintenant $S(x) = \{\varrho_\xi\}$ si $x = \pi_\xi$ et $S(x) = 0$ si x diffère de tout π_ξ. Il est clair ainsi qu'il n'existe aucun ensemble parfait indépendant. De plus, l'ensemble

$$A = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\xi, \ldots\} \qquad (1 \leqslant \xi < \Omega_0)$$

est indépendant, donc *il existe un ensemble indépendant qui rencontre chaque ensemble parfait.*

4. Un exemple basé sur une autre idée, de correspondance $x \to S(x)$ où chaque $S(x)$ est formé d'un seul élément et où il n'existe aucun ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle, est le suivant:

Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ une décomposition de l'ensemble des nombres réels en $\aleph_0$ ensembles disjoints, superposables deux à deux par translation. Supposons, de plus, que tout ensemble jouissant de la propriété de *Baire*, contenu dans un E_n, est de première catégorie. Une telle décomposition est réalisée, par exemple, par les ensembles de niveau d'une solution discontinue de l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ayant un ensemble dénombrable de valeurs distinctes. Voir [10] ou [5]. On peut supposer que $0 \in E_0$. Il existe, en vertu des hypothèses faites, une suite $t_1 > t_2 > t_3 > \ldots > t_n > \ldots$ telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ et $E_0 + t_n = E_n$ (par $A + t$ on désigne l'ensemble obtenu de A par une translation de longueur t). Pour chaque x il existe un seul n tel que $x \in E_n$; posons $S(x) = x + (t_{n+1} - t_n)$. Supposons, par réduction à l'absurde, qu'il existe un ensemble indépendant M qui est un résiduel dans un certain intervalle I. Posons $R = M \cap I$. On peut choisir un n assez grand pour qu'il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $J + (t_{n+1} - t_n) \subset I$. L'ensemble $A_n = R \cap E_n \cap J$ est de deuxième catégorie, donc l'ensemble $A_n + (t_{n+1} - t_n) \subset J + (t_{n+1} - t_n)$ est aussi de deuxième catégorie. Mais en vertu de l'indépendance de l'ensemble R et du fait que $A_n \subset R$, $x + (t_{n+1} - t_n)$ n'appartient à R pour aucun $x \in A_n$. Donc $(A_n + (t_{n+1} - t_n)) \cap R = 0$. Mais R est un résiduel sur $J + (t_{n+1} - t_n)$; il s'ensuit que $A_n + (t_{n+1} - t_n)$ est de première catégorie, ce qui est une contradiction.

Remarque. Dans la correspondance $x \to S(x)$ établie ci-dessus il n'existe aucun ensemble indépendant de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de *Baire*. En effet, d'après un théorème connu [11], si un tel ensemble M existait, alors on aurait un intervalle I où M serait un résiduel.

Il n'est pas sans intérêt, après l'exemple donné, d'établir des conditions suffisantes pour l'existence d'un ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle. Un résultat de [4], p. 253, nous suggère le théorème suivant:

Supposons que pour chaque x on a $f(x) > 0$. Si (C) il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ soit résiduel dans un certain inter-

valle alors il existe un ensemble indépendant qui est un résiduel dans un certain intervalle. Si, en outre, il existe, pour chaque x, un intervalle I_x centré en x, tel que $S(x) = E - I_x$, alors la condition (C) est non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour l'existence d'un ensemble indépendant qui soit un résiduel dans une certain intervalle.

En effet, la première partie du théorème est une conséquence du raisonnement développé au numéro 2. Quant à la deuxième partie, on peut suivre la marche du raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème 7 de [4]. Supposons, donc, qu'il existe un ensemble A indépendant, résiduel dans un certain intervalle. Supposons aussi qu'il y a, pour chaque x, un intervalle I_x tel que $S(x) = E - I_x$. Admettons, par réduction à l'absurde, que pour chaque α réel l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ n'est résiduel dans aucun intervalle. Désignons par β le diamètre de l'ensemble A. Posons $E_\beta = \{x; f(x) \geqslant \frac{\beta}{2}\}$, $F_1 = E_\beta \cap A$, $F_2 = E_\beta \cap (E - A)$. E_β, donc à fortiori F_1 et F_2, ne sont résiduels dans aucun intervalle. Pour $x \in A$, en vertu des hypothèses faites sur $S(x)$, on a $f(x) \geqslant \frac{\beta}{2}$, donc $A \subset E_\beta$ et $A = F_1$. On arrive ainsi à une contradiction, car A est, par hypothèse, résiduel dans un certain intervalle.

En vertu d'un théorème de [11] et du théorème démontré ci-dessus, on a aussi: *Si, pour chaque x, il existe un intervalle I_x centré en x, tel que $S(x) = E - I_x$, alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un ensemble indépendant de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire est que, pour un certain α, l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ contienne un ensemble de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire.*

Dans le cas général, la condition (C) n'est pas nécessaire. En effet, considérons une décomposition de E en $\aleph_0$ ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ disjoints deux à deux et tels que, pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ et pour chaque intervalle I, tout ensemble jouissant de la propriété de *Baire* et contenu dans $I - A_n$ soit de première catégorie. Pour l'existence d'une telle décomposition voir [5]. On peut prendre, par exemple, pour $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, les ensembles de niveau d'une fonction discontinue qui prend seulement $\aleph_0$ valeurs distinctes et qui satisfait l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Si $x \in A_n$, désignons par $K(x)$ l'intervalle centré en x et de longueur $\frac{2}{n}$. Soit R un ensemble dénombrable partout dense. Posons $S(x) =$

$= (E - K(x)) \cap R$. On a $f(x) = \frac{1}{n}$ pour $x \in A_n$. Donc, si $\alpha > 1$, $E_\alpha = \{x; f(x) \geqslant \alpha\} = 0$; si $\alpha \leqslant 1$, $E_\alpha \subset E_{\frac{1}{n+1}} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ pour un certain entier positif n. Mais, d'après la définition des ensembles A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et en tenant compte qu'on a, pour chaque intervalle I et pour chaque entier $p > n+1$, $I \cap E_\alpha \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) \cap I \subset I - A_p$, on déduit que chaque ensemble jouissant de la propriété de *Baire* et contenu dans E_α est de première catégorie. Cela veut dire que l'ensemble E_α n'est résiduel dans aucun intervalle. D'autre part, il est évident que le complémentaire de l'ensemble R est indépendant. Mais le complémentaire d'un ensemble dénombrable est résiduel dans chaque intervalle.

5. On sait que la condition $x \in \overline{S(x)}$, pour chaque x, n'entraine pas l'existence d'un ensemble indépendant partout dense [1]. Nous nous proposons de donner une condition suffisante pour l'existence d'un ensemble indépendant non seulement partout dense, mais qui rencontre chaque ensemble parfait. Désignons par $S^{-1}(x)$ l'ensemble de tous les nombres u tels que $x \in S(u)$. *Une condition suffisante pour l'existence d'un ensemble indépendant qui rencontre tout ensemble parfait est que, pour tout x, les ensembles $S(x)$ et $S^{-1}(x)$ soient dénombrables.*

En effet, soit Ω_0 le nombre ordinal initial qui correspond à la puissance du continu. Soit $P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots, (\xi < \Omega_0)$ une suite du type Ω_0, formée avec tous les ensembles parfaits de la droite. Soit $x_1 \in P_1$. Il existe, d'après les hypothèses, un élément $x_2 \in P_2 - S(x_1) - S^{-1}(x_1)$. Il est visible que x_1 et x_2 sont indépendants. Supposons qu'on a défini un ensemble indépendant $\{x_1, x_2, \ldots, x_\eta, \ldots\}$, $(\eta < \xi, x_\eta \in P_\eta)$. En vertu du théorème de *König* et d'après les hypothèses, il existe un élément x_ξ tel que $x_\xi \in P_\xi - \bigcup_{\eta<\xi} S(x_\eta) - \bigcup_{\eta<\xi} S^{-1}(x_\eta)$. On a défini ainsi un ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ $(1 \leqslant \xi < \Omega_0)$, qui est évidemment indépendant et qui rencontre tout ensemble parfait.

Les conditions du théorème que nous venons de démontrer sont remplies, en particulier, dans l'exemple donné au numéro 4, donc il en existe un ensemble indépendant qui rencontre chaque ensemble parfait.

Une autre application. Toute fonction réelle φ, d'une variable réelle, dont les ensembles de niveau (c'est-à-dire les ensembles de la forme $\{x; \varphi(x) = t\}$ avec t donné) sont dénombrables, a la propriété suivante: il existe un ensemble H qui rencontre tout ensemble parfait, tel que, pour $x \in H$, $y \in H$ on ait $\varphi(x) \neq y$ et $\varphi(y) \neq x$.

6. En quelles conditions existe-t-il un ensemble parfait indépendant ? On a : *S'il existe un* $\alpha > 0$ *tel que l'ensemble* $K = \{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ *contienne un ensemble parfait, alors il existe un ensemble parfait indépendant.* En effet soit Π un ensemble parfait contenu dans K. Il existe un intervalle I de longueur inférieure à α et tel que $I \cap \Pi$ contienne encore un ensemble parfait, soit-il P. L'ensemble P est indépendant.

L'ensemble K peut être, en particulier, un ensemble borelien non dénombrable ou, plus général, un ensemble non dénombrable et analytique au sens de *Lusin* et *Souslin*. En effet, on sait qu'un tel ensemble contient toujours un ensemble parfait [15].

La condition que nous venons de donner n'est pas nécessaire pour l'existence d'un ensemble parfait indépendant. En effet, considérons une décomposition de la droite numérique en $\aleph_0$ ensembles disjoints E_1, E_2, ..., E_n, ... qui rencontrent chaque ensemble parfait. (Pour une telle décomposition voir, par exemple, [5] ou [10]. Soit R un ensemble partout dense et dont le complémentaire contient un ensemble parfait T. Pour $x \in E_n$ posons $S(x) = \{y; |y - x| \geqslant \frac{1}{n}, y \in R\}$. On a $\{x; f(x) \geqslant \alpha\} = 0$ si $\alpha > 0$; si $\alpha \leqslant 1$, alors $\{x; f(x) \geqslant \alpha\} \subset F_n = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{n+1}$ pour chaque n entier positif. Mais F_n ne contient aucun ensemble parfait, donc l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ est totalement imparfait. Pourtant, l'ensemble parfait T est indépendant.

En utilisant un raisonnement qui repose aussi sur une certaine décomposition de la droite, nous allons donner maintenant un *exemple de correspondance* $x \to S(x)$, *telle que*: 1° $S(x)$ *contient, pour chaque* x, *un seul élément*; 2° *Il existe un ensemble parfait et indépendant*; 3° *il n'existe aucun ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle*; 4° *Il n'existe aucun ensemble indépendant, mesurable et de mesure positive. Reprenons, pour cela, l'exemple du numéro* 4, exemple qui satisfait les conditions 1° et 3°. Il est aisé de vérifier que cet exemple satisfait aussi la condition 4°. Nous allons montrer que, avec une précaution suplémentaire, la condition 2° sera aussi remplie. En effet, supposons qu'il existe un ensemble parfait Π contenu dans E_0. Π est indépendant, parce-que pour $x \in \Pi$, $y \in \Pi$ on a $S(x) = x + t_1 \in E_1$, donc $y \in S(x)$ et $x \in S(y)$. (Pour la possibilité que E_0 contienne un ensemble parfait voir, par exemple, [5], théorème 4).

Un autre exemple de correspondance $x \to S(x)$ jouissant de propriétés singulières s'obtient comme il suit:

On sait qu'il existe une décomposition $E = A \cup B$, $A \cap B = 0$, A de mesure nulle, B de première catégorie. Posons, pour $x \in A$, $S(x) = B$ et, pour $x \in B$, $S(x) = E - \{x\}$. On voit alors que les seuls ensembles indépendants sont les sous-ensembles de A. Mais A est un ensemble résiduel, donc *on peut définir une correspondance* $x \to S(x)$ *telle qu'il existe un ensemble résiduel indépendant mais il n'existe aucun ensemble indépendant de mesure extérieure positive.* Si nous posons $S(x) = A$ pour $x \in B$ et $S(x) = E - \{x\}$ pour $x \in A$, alors on constate que *on peut définir une correspondance* $x \to S(x)$ *telle qu'il existe un ensemble indépendant qui soit une épaisseur pleine dans chaque intervalle, mais il n'existe aucun ensemble indépendant de deuxième catégorie.*

7. Dans ce numéro nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence d'un ensemble indépendant de deuxième catégorie ou de mesure extérieure positive. On a: *Si pour chaque* $x \in E$, *à l'exception possible d'un ensemble* P *de première catégorie, les ensembles* $S(x)$ *et* $S^{-1}(x)$ *sont de première catégorie et si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *alors il existe un ensemble indépendant de deuxième catégorie.* En effet, soit F un ensemble linéaire quelconque, de deuxième catégorie. Soit $x_1 \in E = F - P$. L'ensemble $E_2 = E_1 - S(x_1) - S^{-1}(x_1)$ est de deuxième catégorie. Il existe donc $x_2 \in E_3 = E_2 - P$. Il est visible que x_1 et x_2 sont indépendants. Soit α un ordinal $< \Omega$. Supposons que pour chaque $\beta < \alpha$ on a défini un élément $x_\beta \in P$, tel que l'ensemble $\{x_\beta\}_{\beta<\alpha}$ soit indépendant. Cet ensemble étant dénombrable, on conclut que l'ensemble

$$K_\alpha = K_1 - \bigcup_{\beta<\alpha} S(x_\beta) - \bigcup_{\beta<\alpha} S^{-1}(x_\beta)$$

est de deuxième catégorie. Il existe donc un $x_\alpha \in K_\alpha - P$. L'ensemble $\{x_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ est indépendant et non dénombrable. On a démontré ainsi que chaque ensemble de deuxième catégorie contient un ensemble indépendant non dénombrable. Mais *N. Lusin* a démontré que, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors il existe un ensemble linéaire L, ayant la puissance du continu, qui ne contient aucun ensemble non dénombrable et de première catégorie [13]. Il s'ensuit que L est de deuxième catégorie. D'après le raisonnement ci-dessus, on déduit que L contient un ensemble indépendant non dénombrable, donc de deuxième catégorie.

W. Sierpiński a démontré que, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui ne contient aucun ensemble non dénombrable de mesure nulle [14]. En remplaçant, dans le raisonnement ci-dessus, la première catégorie par la mesure nulle, la deuxième catégorie par la mesure extérieure positive et en utilisant le résultat de

W. Sierpiński que nous venons d'énoncer, on parvient au théorème suivant: *Si, pour chaque $x \in E$, à l'exception possible d'un ensemble R de mesure nulle, les ensembles $S(x)$ et $S^{-1}(x)$ sont de mesure nulle et si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors il existe un ensemble indépendant de mesure extérieure positive.*

8. Il est aisé se rendre compte que la „pauvreté" des ensembles $S(x)$ entraine, en général, l'existence des ensembles indépendants riches d'un certain point de vue.

Jusqu'ici, nous avons cherché des exemples rares d'ensembles indépendants, exemples dont la nature était la suivante: malgré la „pauvreté" des ensembles $S(x)$, on ne trouvait pas des ensembles indépendants assez riches ou épais. Il est lieu de citer ici certains résultats de *P. Erdös*: Il est possible que, pour chaque x, $S(x)$ soit de puissance inférieure à c et pourtant qu'il n'existe aucune paire de points indépendants. Il est possible que $S(x)$ ne soit partout dense pour aucun x et pourtant qu'il n'existe aucune paire de points indépendants [2]. Mais on peut construire aussi des exemples d'une autre nature; des exemples où, malgré la richesse des ensembles $S(x)$, les ensembles indépendants soient aussi très riches. En voici un: *Il existe une correspondance $x \to S(x)$ où chaque $S(x)$ rencontre tout ensemble parfait et telle qu'il existe un ensemble indépendant qui rencontre tout ensemble parfait.* En effet, soit Ω_0 le nombre ordinal initial qui correspond à la puissance du continu et soit $P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots (\xi < \Omega_0)$ une suite du type Ω_0, formée avec tous les ensembles parfaits de la droite. Soient α_1 et β_1 deux éléments distincts de P_1, α_2 et β_2 deux éléments distincts de P_2, tels que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \beta_1$, $\alpha_1 \neq \beta_2 \neq \beta_1$ et α_ξ, β_ξ deux éléments distincts de P_ξ, tels que $\alpha_\eta \neq \alpha_\xi \neq \beta_\eta$, $\alpha_\eta \neq \beta_\xi \neq \beta_\eta$ dès qu'on a $1 \leqslant \eta < \xi < \Omega_0$. L'existence de tous ces éléments est assurée par la définition de Ω_0 et par le fait que chaque ensemble parfait a la puissance du continu. Désignons par A l'ensemble $\{\alpha_\xi\}_{1 \leq \xi < \Omega_0}$ et par B le complémentaire de A. Il est évident que chacun des ensembles A et B rencontre tout ensemble parfait. Posons maintenant $S(x) = B$ si $x \in A$ et $S(x) = A$ si $x \in B$. Chacun des ensembles A et B est indépendant.

9. La structure des ensembles indépendants dans le cas où, pour chaque x, $S(x)$ est non dense, est peu connue. *P. Erdös* a démontré que, dans ce cas, il existe toujours un ensemble indépendant infini, mais on ne sait pas si'il existe toujours un ensemble indépendant non dénombrable [2]. Nous n'avons obtenu aucun résultat nouveau dans ce problème, c'est seulement une autre méthode que nous voulons signaler,

méthode plus compliquée que celle de *P. Erdös* mais qui, peut être, par des modifications ultérieures, pourra fournir aussi des résultats nouveaux.

Nous nous plaçons dans le cas d'un espace E métrique séparable. Considérons une correspondance $x \to S(x)$, où $x \in E$, $S(x) \subset E$ et $S(x)$ est non dense. *Pour chaque ensemble* $X \subset E$, *de deuxième catégorie, et, pour chaque sphère* $I \subset E$, *il existe une sphère* $J \subset I$ *telle que l'ensemble* $\{x;\ x \in X,\ J \cap S(x) = 0\}$ *soit de deuxième catégorie.* C'est précisément sous cette forme que nous allons utiliser la non densité des ensembles $S(x)$. Encore une remarque: *Si un ensemble* X *est de deuxième catégorie, alors il existe une sphère* S *telle que* X *soit de deuxième catégorie dans* S *et dans chaque sous-sphère de* S.

Nous dirons que les ensembles de la famille $\{E_\iota\}_{\iota \in Y}$ sont *mutuellement indépendants* si l'ensemble $\{x_\iota\}_{\iota \in Y}$ est indépendant dès que $x_\iota \in E_\iota$ pour $\iota \in Y$.

Lemme 1. Il existe deux ensembles disjoints, de deuxième catégorie, mutuellement indépendants. En effet, considérons une sphère I telle que l'ensemble $A = \{x;\ x \in E,\ I \cap S(x) = 0\}$ soit de deuxième catégorie. L'ensemble $A \cap I$ est indépendant, donc si'il contient au moins deux points, alors le lemme est démontré. Nous pouvons donc admettre que $A - I$ est de deuxième catégorie. Il existe une sphère J telle que $J \cap I = 0$ et $A - I$ soit de deuxième catégorie dans chaque sous-sphère de J. Il existe une sphère $K \subset J$, telle que l'ensemble $B = \{x;\ x \in I,\ K \cap S(x) = 0\}$ soit de deuxième catégorie. Les ensembles B et $A \cap K$ sont mutuellement indépendants.

Lemme 2. Supposons qu'ils existent n *ensembles disjoints* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *de deuxième catégorie et mutuellement indépendants. Dans ce cas, il existe une sphère* J *et* n *ensembles* B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ *de deuxième catégorie, tels que* $B_i \subset A_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *et tels encore que la relation* $x \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ *entraîne* $J \cap S(x) = 0$. En effet, il existe un ensemble de deuxième catégorie $B_1 \subset A_1$ et une sphère I_1, telle que, pour $x \in B_1$, on ait $I_1 \cap S(x) = 0$. Il existe un ensemble de deuxième catégorie $B_2 \subset A_2$ et une sphère $I_2 \subset I_1$, telle que pour $x \in B_2$ on ait $I_2 \cap S(x) = 0$. En continuant ainsi, on trouve un ensemble de deuxième catégorie $B_n \subset A_n$ et une sphère $I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_2 \subset I_1$, telle que, pour $x \in B_n$, on ait $I_n \cap S(x) = 0$. Mais puisque $I_n \subset I_i$ pour chaque i, tel que $1 \leqslant i < n$, il s'ensuit que, pour chaque i tel que $1 \leqslant i < n$, et pour chaque $x \in B_i$, on a $I_n \cap S(x) = 0$. La sphère $J = I_n$ satisfait l'énoncé du lemme 2.

Lemme 3. Supposons qu'il existe n ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de deuxième catégorie et mutuellement indépendants. Alors, en prenant les ensembles* B_i *et* J *avec leur signification dans le lemme 2, il existe* $C_i \subset B_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ *et il existe* $M \subset J$, *tels que* $C_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ *et* M *soient de deuxième catégorie et, pour* $x \in M$, *on ait* $(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \cap S(x) = 0$.

En effet, pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ il existe une sphère L_i telle que B_i soit de deuxième catégorie dans L_i et dans chaque sous-sphère de L_i. Il existe une sous-sphère $l_1 \subset L_1$ et un ensemble de deuxième catégorie $M_1 \subset J$, tels que pour $x \in M_1$ on ait $l_1 \cap S(x) = 0$. Il existe une sous-sphère $l_2 \subset L_2$ et il existe un ensemble de deuxième catégorie $M_2 \subset M_1$, tels que pour $x \in M_2$ on ait $l_2 \cap S(x) = 0$ et ainsi de suite. On arrive ainsi à une sphère $l_n \subset L_n$ et à un ensemble de deuxième catégorie $M_n \subset M_{n-1} \subset \ldots \subset M_2 \subset M_1 \subset J$ tels que, pour $x \in M_n$, on ait $l_n \cap S(x) = 0$. Du fait que $M_n \subset M_i$ pour chaque i tel que $1 \leqslant i < n$, il s'ensuit que, pour chaque $x \in M_n$, on a $(\bigcup_{i=1}^{n} l_i) \cap S(x) = 0$. Posons $C_i = B_i \cap l_i$. De $l_i \subset L_i$ il s'ensuit que C_i est de deuxième catégorie. En posant $M = M_n$, le lemme 3 est démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant: *Pour chaque n entier positif, il existe n ensembles disjoints, de deuxième catégorie, mutuellement indépendants.* En effet, pour $n = 2$ le théorème se réduit au lemme 1. Supposons qu'il existe n ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de deuxième catégorie et mutuellement indépendants et montrons qu'il existe aussi $n + 1$ ensembles de cette nature. En effet, les $n + 1$ ensembles cherchés sont (avec la notation utilisée dans le lemme 3), $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1} = M$.

Le résultat obtenu résulte d'ailleurs aussi du raisonnement employé dans [2] pour démontrer le théorème 6.

Références

[1] *F. Bagemihl*, The Baire category of independent sets, Compositio Math. 13 (1956), 71—75.

[2] *P. Erdös*, Some remarks on set theory III, Michigan Math. Journ. 2 (1953), 51—57.

[3] *P. Erdös-G. Fodor*, Some remarks on set theory V, Acta Scient. Math.-Szeged 17 (1956), 250—260.

[4] *P. Erdös-G. Fodor*, Some remarks on set theory VI, Acta Scient. Math. Szeged 18 (1957), 243—260.

[5] *P. Erdös-S. Marcus*, Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 8 (1957), 443—452.

[6] *G. Fodor*, On two problems concerning the theory of binary relations, Publicationes Math., Debrecen, 1 (1950) 199—200.

[7] *G. Fodor*, On a theorem in the theory of binary relations, Compositio Math. 8 (1951), p. 250.

[8] *G. Fodor*, On a problem concerning the theory of binary relations, Niew Archiw voor Wiskunde, 23 (1951), 247—248.

[9] *G. Grünwald*, Über einen mengentheoretischen Satz, Mat. Fiz. Lapok, 44 (1937), 51—53.

[10] *I. Halperin*, Non-measurable sets and the equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$, Proceed. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 221—224.

[11] *C. Kuratowski*, Topologie *I*, Warszawa-Wroclaw 1948, p. 56.

[12] *D. Lázár*, On a problem in the theory of aggregates, Compositio Math. 3 (1936), p. 304.

[13] *N. Lusin*, Sur un problème de M. Baire, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 158 (1914), 1258—1261.

[14] *W. Sierpinski*, Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), Fund. Math. 5 (1924), 177—187.

[15] *M. Souslin*, Sur une définition des ensembles mesurables *B* sans nombres transfinis, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 164 (1917), 88—91.

Institut de Mathématique de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest.

Adresse de l'auteur: S. Marcus, Institut de Matematică, str. M. Eminescu 47 Bucarest 3 (R.P.R. (Roumaine).

Zur Differentialgeometrie im totalisotropen R_2 und R_3 eines komplexen euklidischen R_4 und R_6

Von

M. Pinl, Köln

(Eingegangen am 22. September 1958)

Guido Hoheisel zum 65. Geburtstag

Die absolute quadratische M^2_{2n-2} im Fernraum eines komplexen euklidischen $2n$-dimensionalen Raumes R_{2n} ist Träger zweier Scharen $(n-1)$-dimensionaler linearer Erzeugender[1] $(n \geqslant 2)$. Diese Erzeugenden sind die Spuren der totalisotropen linearen R_n des R_{2n} im Schnitt mit dem Fernraum des R_{2n}. Jede Richtung in einem solchen totalisotropen R_n zielt mithin zu einem Punkt der absoluten M^2_{2n-2} des R_{2n}, jeder Vektor in einem solchen R_n ist ein isotroper Vektor, jede Kurve darin eine unbeschränkt isotrope Kurve[2], jede zwei oder mehrdimensionale Mannigfaltigkeit eine unbeschränkt totalisotrope[3] $V_m (2 \leqslant m \leqslant n-1)$. Da die im totalisotropen R_n vom euklidischen R_{2n} induzierte Metrik durch die Nullmatrix gegeben ist, verschwinden alle Skalarprodukte von Vektoren dieses R_n insbesondere auch alle Skalarprodukte und Determinanten aus Ableitungen beliebiger Ordnung der Ortsvektoren eingebetteter $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$. Daher ist es unmöglich, eine Differentialgeometrie dieser V_m mit Hilfe von Differential- und Integralinvarianten aufzubauen[4]. Andererseits sind jedoch isotrope Vektoren, isotrope Kurven und isotrope Mannigfaltigkeiten konform invariant definierte Begriffe. Daher kann,

---

[1] Vgl. z. B. Enyklopädie der mathematischen Wissenschaften III C 7; *Segre*, Mehrdimensionale Räume, S. 851, ferner *F. Klein*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, S. 80, Berlin 1928.

[2] Vgl. zur Terminologie *M. Pinl*, Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen, Comp. math. 5/2 (1937), 208—238.

[3] Vgl. 2.

[4] Vgl. 2, S. 238.

wie neuerdings Herr *K. Strubecker* betont hat[5], die aequiforme Differentialgeometrie eines totalisotropen R_n des komplexen euklidischen R_{2n} im Wesentlichen mit der affinen Differentialgeometrie eines n-dimensionalen affinen Raumes identifiziert werden, da die Gruppe $G_{\frac{2n(2n+1)}{2}+1}$ aller Ähnlichkeiten des R_{2n} im totalisotropen R_n die Gruppe $G_{n(n+1)}$ aller Affinitäten dieses R_n induziert. Man kann dann alle Ergebnisse der affinen Differentialgeometrie im n-dimensionalen affinen Raum übernehmen und den $2n$-dimensionalen Ausgangsraum vergessen. Demgegenüber wollen wir im Folgenden versuchen, den formalen Apparat der bewegungsinvarianten Differentialgeometrie im komplexen $2n$-dimensionalen Raum beizubehalten und die Differentialgeometrie der V_m in totalisotropen R_n des R_{2n} ($1 \leqslant m \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$) mit Hilfe von geeigneten Differential- und Integralkovarianten[6] an Stelle der identisch verschwindenden Differential- und Integralinvarianten dieser Mannigfaltigkeiten aufzubauen. Dabei beschränken wir uns auf die typischen Fälle $n = 2, m = 1$ (Kurven in totalisotropen Ebenen des euklidischen komplexen R_4) und $n = 3, m = 1, 2$ (Kurven und Flächen in totalisotropen R_3 des euklidischen komplexen R_6). Im ersten Fall handelt es sich um den Extremfall (c_1) der metrischen Komponentenmatrizen

$$(a_1)\ \left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| \text{ euklidische Ebene,}\quad (b_1)\ \left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| \text{ halbisotrope Ebene,}$$

$$(c_1)\ \left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| \text{ totalisotrope Ebene,}$$

im zweiten Fall um den Extremfall (d_2) der metrischen Komponentenmatrizen

$$(a_2)\ \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\| \text{ euklidischer Raum,}\quad (b_2)\ \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\| \text{ einfach isotroper Raum,}$$

$$(c_2)\ \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\| \text{ zweifach isotroper Raum,}\quad (d_2)\ \left\|\begin{matrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\| \text{ totalisotroper Raum.}$$

[5] Vgl. *K. Strubecker*, Differentialgeometrie isotroper Mannigfaltigkeiten, Schriftenreihe des Instituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 1, S. 143—155, Akademie-Verlag Berlin, 1957.

[6] Vgl. zur Terminologie *E. Study*, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven im Euklidischen Raum. Transact. Amer. Math. Soc. **10**, 1—49 Die natürlichen Gleichungen der analytischen Kurven im Euklidischen Raum, ibidem **11**, 249—279 (1910).

Von den singulären Fällen wurden bereits früher (b_1) und (b_2) von *E. Study*[7] und *K. Strubecker*[8] ausführlich untersucht. Fall (c_2) harrt noch einer künftigen Untersuchung.

§ 1. $n = 2$, $m = 2$; Kurventheorie in totalisotropen Ebenen

In der Differentialgeometrie der isotropen Kurven des euklidischen komplexen R_3 wird mit Vorteil die Determinante $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v})$ verwendet[9]. Dabei bedeutet $\mathfrak{v}$ einen beliebigen konstanten nichtisotropen und nichtverschwindenden Vektor, $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ sind die beiden ersten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(t)$ der in Rede stehenden isotropen Kurve (der Ortsvektor ist eine analytische Funktion des komplexen Parameters t). Die Determinante $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v})$ ist offenbar eine relative Differentialkovariante der Ordnung 2 vom Gewicht 3; sie verschwindet identisch in $\mathfrak{v}$, sobald $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ linear abhängig sind, d. h. auf Geraden. Im komplexen euklidischen R_4 betrachten wir nunmehr eine isotrope Kurve $\mathfrak{x}(t)$ in einer totalisotropen Ebene. Sämtliche Ableitungen des Kurvenvektors sind isotrop (oder Nullvektoren):

$$\mathfrak{x}'^2 \equiv \mathfrak{x}''^2 \equiv \ldots \equiv 0 \{t\}. \tag{1}$$

Auch alle Skalarprodukte beliebiger Ableitungen k^{ter} bzw. l^{ter} Ordnung verschwinden identisch ($\mathfrak{x}^{(k)} \cdot \mathfrak{x}^{(l)} \equiv 0 \{t\}$, $k, l = 1, 2, \ldots$). Nun seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ zwei konstante linear unabhängige nichtisotrope Vektoren. Dann ist die von ihnen aufgespannte Ebene eine euklidische Ebene des R_4. Wir nennen sie die *Eichebene* der wegen (1) unbeschränkt[10] isotropen Kurve $\mathfrak{x}(t)$ und bilden die Determinante $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$. Sie ist eine relative Differentialkovariante[11] der Ordnung 2 vom Gewicht 3 auf der Kurve $\mathfrak{x}(t)$. Denn wird durch die analytische Parametertransformation

$$p = p(t), \quad (\dot{f} = \frac{df}{dp})$$

eine neuer Kurvenparameter p eingeführt, so kommt

---

[7] Vgl. 6.

[8] Vgl. z. B. *K. Strubecker*, Differentialgeometrie des isotropen Raumes I, II, III, IV, V. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **150**, 1–53 (1941); Math. Z. **47**, 743–777 (1942), **48**, 369–427 (1942); **50**, 1–92 (1944); **52**, 525–573 (1949).

[9] Vgl. 6, ferner *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, S. 44, Berlin 1930.

[10] Vgl. 2.

[11] Vgl. 6.

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \left(\frac{dp}{dt}\right)^3. \tag{2}$$

Dann ist $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})^{1/3}$ eine relative Differentialkovariante vom Gewicht 1 auf $\mathfrak{x}(t)$ und die absolute Integralkovariante

$$q(t, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \int_{t_0}^{t} (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})^{1/3} \, d\tau \tag{3}$$

kann als „*Quasibogenlänge*" zum Ersatz der identisch verschwindenden Bogenläge auf $\mathfrak{x}(t)$ herangezogen werden. Als „natürlicher Kurvenparameter" leistet q auf der Kurve eine Normierung der Differentialkovarianten $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$. Denn für $p(t) = q(t)$ gilt wegen (2) und (3)

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \left(\frac{dq}{dt}\right)^3 = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}),$$

also

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \equiv 1 \qquad \{q\}. \tag{4}$$

Aus der Identität (4) folgt durch Differentiation nach q, da $\mathfrak{x}(q)$ nach Voraussetzung eine ebene Kurve ist,

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\dot{\mathfrak{x}}, \alpha\dot{\mathfrak{x}} + \beta\ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \beta \, . \, 1 \equiv 0 \; \{q\}.$$

Für die auf einen natürlichen Parameter (3) bezogene Kurve $\mathfrak{x}(q)$ in einer totalisotropen Ebene besteht mithin die Ableitungsgleichung

$$\dddot{\mathfrak{x}} = \alpha\dot{\mathfrak{x}}. \tag{5}$$

Wir schreiben $-\alpha = k$ und berechnen k durch skalare Multiplikation von (5) mit dem Trivektor $[\ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}]$. Damit ergibt sich für die Differentialkovariante $k(q)$, die wir die „*Quasikrümmung*" der isotropen Kurve $\mathfrak{x}(q)$ nennen, der Ausdruck

$$k(q, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \tag{6}$$

oder auch

$$k(q, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\ddddot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}), \tag{7}$$

da die Identität

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \ddddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) + (\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \equiv 0 \quad \{q\}$$

besteht. Die Werte der Determinanten (2), (6), (7) hängen offenbar nur insofern von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ ab, als ihre Werte geändert werden, wenn man die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ abändert, die Ableitungen $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ bzw. $\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \ddddot{\mathfrak{x}}$ jedoch beibehält (oder in anderer Weise abändert wie $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$). Unterwirft man jedoch alle Vektoren des Vierbeins $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ bzw. $\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ bzw. $\dot{\mathfrak{x}}, \ddddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ derselben Transformation aus der orthogonalen Gruppe

G_{10} des R_4, so bleiben die Determinantenwerte ungeändert. Die totalisotropen Ebenen des R_4 gehen dabei in ebensolche und die euklidischen Eichebenen wiederum in euklidische Ebenen über. Insbesondere kann man auf diese Weise stets die Koordinatenebene $x_3 = x_4 = 0$ als Eichebene einführen und durch die orthogonalen Stellungsvektoren

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_3 = \{0, 0, 1, 0\}, \mathfrak{w} = \mathfrak{e}_4 = \{0, 0, 0, 1\} \tag{8}$$

charakterisieren. Damit ist der Anschluß an den Formalismus der ebenen affinen Differentialgeometrie[12] erreicht. Zugleich ergibt sich ein geometrischer Zusammenhang von totalisotroper Kurven- und euklidischer Eichebene. Betrachten wir nämlich die Projektion $\mathfrak{y}(q)$ der auf einen natürlichen Parameter q bezogenen Kurve $\mathfrak{x}(q)$ einer totalisotropen Ebene auf die Eichebene $x_3 = x_4 = 0$! Dann gilt mit Rücksicht auf (8)

$$\mathfrak{y}(q) = \mathfrak{x}(q) - \mathfrak{e}_3(\mathfrak{e}_3\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_4(\mathfrak{e}_4\,\mathfrak{x}) = \{x_1(q),\ x_2(q),\ 0,\ 0\}^{13},$$

$$\dot{\mathfrak{y}}(q) = \{\dot{x}_1(q),\ \dot{x}_2(q),\ 0,\ 0\},\ \ddot{\mathfrak{y}}(q) = \{\ddot{x}_1(q), \ddot{x}_2(q),\ 0,\ 0\},$$

$$(\dot{\mathfrak{y}},\ \ddot{\mathfrak{y}},\ \mathfrak{e}_3,\ \mathfrak{e}_4) \equiv \dot{x}_1\,\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1\,\dot{x}_2 \equiv (\dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w}) \equiv 1\ \{q\}.$$

Der auf $\mathfrak{x}(q)$ natürliche Parameter q ist also auch natürlicher Parameter (im Sinne der affinen Differentialgeometrie) auf der Projektionskurve. Die Zuordnung der totalisotropen Kurvenebene zur euklidischen Eichebene ist offenbar eine affine Abbildung durch welche die Quasibogenlänge der Kurve $\mathfrak{x}(q)$ in die Affinbogenlänge der Kurve $\mathfrak{y}(q)$ übergeht und ebenso ihre Quasikrümmung in die Affinkrümmung von $\mathfrak{y}(q)$:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4)^{1/3}\,dt = \int_{p_0}^{p_1} (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4)^{1/3}\,dp = p_1 - p_0 =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (x_1'\,x_2'' - x_1''\,x_2')^{1/3}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (y_1'\,y_2'' - y_1''\,y_2')^{1/3}\,dt,$$

$$k(q, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4) = (\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4) = \ddot{x}_1\,\dddot{x}_2 - \dddot{x}_1\,\ddot{x}_2 = \ddot{y}_1\,\dddot{y}_2 - y_1\,\ddot{y}_2.$$

Da die G_{10} der Bewegungen des euklidischen R_4 auf der totalisotropen Ebene die G_5 aller flächentreuen Affinitäten, in der euklidischen Eichebene aber nur die G_3 aller Bewegungen auf der Eichebene induziert, ist die Differentialgeometrie der Kurve $\mathfrak{x}(q)$ allgemeiner aber eigenschaftsärmer als die Differentialgeometrie der Kurve $\mathfrak{y}(q)$, zu deren metrischer Krümmung

[12] Vgl. *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, 1. Kapitel, Berlin 1923.

[13] Es gilt $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}$, da die Komponenten x_3, x_4 im allgemeinen nicht verschwinden.

$$\varkappa(q) = \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}$$

z. B. auf dem Urbild $\mathfrak{x}(q)$ kein Gegenstück existiert. Damit ist gezeigt:

(*I*) *Jeder (nichtlinearen) Kurve $\mathfrak{x}(q)$ einer totalisotropen Ebene des komplexen euklidischen R_4 kann in einer geeigneten euklidischen Ebene dieses R_4 eine nichtisotrope Bildkurve $\mathfrak{y}(q)$ von gleichen affindifferentialgeometrischen Eigenschaften zugeordnet werden.*

Ferner ergibt sich durch Spezialisierung mit Rücksicht auf bekannte Sätze der affinen Differentialgeometrie[14]:

(*II*) *Die einzigen Kurven totalisotroper Ebenen mit identisch verschwindender Quasikrümmung sind die isotropen Parabeln (von der euklidischen Länge Null).*

(*III*) *Die Kurven totalisotroper Ebenen mit fester nichtverschwindender Quasikrümmung sind die isotropen nichtsingulären und nichtparabolischen Kegelschnitte (von der euklidischen Länge Null).*

(*IV*) *Die Extremalen des Variationsproblems, $\delta q = 0$, der Quasibogenlänge* (3) *sind die isotropen Parabeln.*

§ 2. $n = 3$, $m = 1$; Kurventheorie im totalisotropen Raum

Mit Rücksicht auf die Ausführungen des vorhergehenden Abschnitts können wir die Behandlung der Kurventheorie im totalisotropen dreidimensionalen Raum kürzer fassen. An Stelle der Differentialkovarianten (2) verwenden wir jetzt die relative Differentialkovariante

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) \left(\frac{dp}{dt}\right)^6. \tag{9}$$

$\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''$ bzw. $\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}$ sind die ersten drei Ableitungen des Kurvenortsvektors nach ihren Parametern, die wir als linear unabhängig voraussetzen. Wiederum verschwinden alle Skalarprodukte $\mathfrak{x}^{(k)}\,\mathfrak{x}^{(l)}$ identisch. Die $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ bezeichnen jetzt drei linear unabhängige konstante nichtisotrope Vektoren des komplexen euklidischen sechsdimensionalen Raumes R_6. Aus (9) bekommen wir die absolute Integralkovariante

$$q(t, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) = \int_{t_0}^{t} (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3)^{1/6}\, d\tau \tag{10}$$

und die Normierung

[14] Vgl. 12, 3. Kapitel, Berlin 1923.

$$(\dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \dddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3) \equiv 1 \quad \{q\} \tag{11}$$

für jeden natürlichen Parameter q. Aus der linearen Abhängigkeit $\dddot{\mathfrak{x}} = \alpha\dot{\mathfrak{x}} + \beta\ddot{\mathfrak{x}} + \gamma\dddot{\mathfrak{x}}$ folgt jetzt durch Differentiation von (11) nach q mit Rücksicht auf diese Gleichung

$$(\dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \ddddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3) \equiv \gamma(\dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \dddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3) \equiv \gamma\, 1 \equiv 0 \quad \{q\}.$$

Damit bekommen wir die Ableitungsgleichung

$$\ddddot{\mathfrak{x}} + k_1(q)\,\dddot{\mathfrak{x}} + k_2(q) = 0$$

und die Quasikrümmungen

$$k_1(q) = (\ddddot{\mathfrak{x}},\ \dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3),\ k_2(q) = -(\ddddot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \dddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3). \tag{12}$$

Für

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{e}_4 = \{0,0,0,1,0,0\},\ \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{e}_5 = \{0,0,0,1,0\},\ \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{e}_6 = \{0,0,0,0,0,1\}$$

verwandeln sich die Quasikrümmungen (12) in die Affinkrümmungen und die Quasibogenlänge (10) in die Affinbogenlänge der Projektionskurve

$$\mathfrak{y}(q) = \mathfrak{x}(q) - \mathfrak{e}_4(\mathfrak{e}_4\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_5(\mathfrak{e}_5\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_6(\mathfrak{e}_6\,\mathfrak{x}) \tag{13}$$

im Eichraum $x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Daher gilt:

(*V*) *Die differentialgeometrischen Eigenschaften der Kurve* $\mathfrak{x}(q)$ *im totalisotropen Raum sind identisch mit den affindifferentialgeometrischen Eigenschaften der Projektionskurve* (*und nur mit diesen*) *im euklidischen Eichraum* $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

Insbesondere gilt z. B.:

(*VI*) *Die räumlichen isotropen kubischen Parabeln sind die einzigen Kurven im totalisotropen Raum, deren beide Quasikrümmungen* (12) *identisch verschwinden, sie sind zugleich die Extremalen des Variationsproblems,* $\delta\, q = 0$, *der Quasibogenlänge* (10).

§ 3. $n = 3$, $m = 2$; Flächentheorie im totalisotropen Raum

Neben den Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ im komplexen euklidischen R_6, deren frühere Bedeutung wir beibehalten, betrachten wir jetzt Ortsvektoren $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ analytischer Flächen in einem totalisotropen R_3 des R_6. Als analytische Funktion seiner beiden unabhängigen komplexen Parameter u_1, u_2 ist $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ unbeschränkt differenzierbar. Wir bezeichnen partielle Ableitungen durch Indizes und verwenden gelegentlich die Summenkonvention des Tensorkalküls. Die skalaren Produkte sämtlicher Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ verschwinden im totalisotropen R_3 identisch, die Determinanten

$$h_{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) = h_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{14}$$

jedoch nur dann, wenn $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ aufgespannt wird. Führen wir durch eine analytische Parametertransformation mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante D neue Flächenparameter $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ein, so gelangen wir mit Hilfe der alten bzw. neuen Koeffizienten $h_{\alpha\beta}$ bzw. $\bar{h}_{ik}$ zu einer relativinvarianten quadratischen Differentialform

$$\bar{h}_{ik}\, d\bar{u}^i\, d\bar{u}^k = D\, h_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta,\ D = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)},\quad \alpha, \beta, i, k = 1, 2. \tag{15}$$

Die Determinante h der Komponenten (14) ist eine relative Differentialinvariante der Ordnung 2 vom Gewicht 4:

$$\bar{h} = \bar{h}_{11}\bar{h}_{22} - \bar{h}_{12}^2 = (h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\, D^4 = h\, D^4,\ \bar{h}^{1/4} = h^{1/4}\, .\, D$$

Dann ist die „*Quasioberfläche*" einer Fläche im totalisotropen R_3 (deren gewöhnliche Oberfläche identisch verschwindet) durch die Integralkovariante

$$\Omega = \int\int_{(B)} |h|^{1/4}\, du_1\, du_2$$

gegeben.

Wenn $h \neq 0$, kann die relativinvariante quadratische Differentialform (15) durch die absolut-invariante quadratische Differentialform

$$\bar{f}_{ik}\, d\bar{u}^i\, d\bar{u}^k = f_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta,\ f_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{h^{1/4}},\ \bar{f}_{ik} = \frac{\bar{h}_{ik}}{\bar{h}^{1/4}},\ \alpha, \beta, i, k = 1, 2 \tag{16}$$

ersetzt werden. Die Nullinien der quadratischen Differentialform (15) oder (16) führen auf die *Quasiasymptotenlinien* der Fläche. Insbesondere gilt in *Quasiasymptotenparametern* (wofern $h \neq 0$) auf $\mathfrak{x}$:

$$f_{11} = f_{22} = 0,\ f_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 2\, f_{12}\, du_1\, du_2.$$

Auf der Projektionsfläche

$$\mathfrak{y}(u_1, u_2) = \mathfrak{x}(u_1, u_2) - e_4(e_4\,\mathfrak{x}) - e_5(e_5\,\mathfrak{x}) - e_6(e_6\,\mathfrak{x}) =$$
$$= \{x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2), 0, 0, 0\}$$
$$\mathfrak{v}_1 = e_4 = \{0, 0, 0, 1, 0, 0\},\ \mathfrak{v}_2 = e_5 = \{0, 0, 0, 0, 1, 0\},$$
$$\mathfrak{v}_3 = e_6 = \{0, 0, 0, 0, 0, 1\}$$

im euklidischen Eichraum $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ verwandeln sich alle so gewonnenen „Quasigrößen" in die entsprechenden „Affingrößen". Dasselbe gilt auch für die kubische invariante Differentialform und die affine Krümmungstheorie der Projektionsfläche $\mathfrak{y}(u_1, u_2)$ im Eichraum.

Dagegen bleiben die metrischen Differentialinvarianten der Projektionsflächen des euklidischen Eichraums wie z. B. die Gaußsche Krümmung der Projektionsfläche im totalisotropen Raum auf der Fläche $\mathfrak{x}(q)$ ohne Gegenstück. Dasselbe gilt auch für den Parallelismus von Levi Civita, dessen affiner Zusammenhang aus der nicht ausgearteten Metrik $g_{\alpha\beta} = \mathfrak{y}_\alpha \mathfrak{y}_\beta$ der Projektionsfläche im Eichraum eindeutig bestimmt ist, während das Gegenstück zu $g_{\alpha\beta}$ im totalisotropen Raum auf $\mathfrak{x}$ fehlt.

Betrachten wir schließlich noch ein Beispiel einer *Quasiminimalfläche* in einem totalisotropen Raum des R_6. Wir setzen

$$x_4 = i\,x_1,\ x_5 = i\,x_2,\ x_6 = i\,x_3. \tag{17}$$

Dann gilt

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial x_3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1,\ 0,\ 0,\ i,\ 0,\ 0 \\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ i,\ 0 \\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ i \end{matrix} \right\|$$

Die Quadratsummen der Zeilenelemente dieser Matrix verschwinden und ihre innern Produkte desgleichen. Der R_3 (17) des R_6 ist also totalisotrop. Nun seien $U(u)$ und $V(v)$ beliebige analytische Funktionen ihrer Argumente und $\mathfrak{x}(u, v)$ eine analytische Fläche im totalisotropen R_3 (17) des R_6 mit den Komponenten:

$$x_1 = v - u,\ x_2 = U' - \dot{V},\ x_3 = \dot{V}u - vU' + 2(U - V) - u\,U' + v\dot{V},$$
$$x_4 = i(v - u),\ x_5 = i(U' - \dot{V}),\ x_6 = i[u\dot{V} - vU' + 2(U - V) - u\,U' + v\dot{V}]. \tag{18}$$

Für die Komponenten y_1, y_2, y_3 der Projektionsfläche

$$\mathfrak{y}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) - \mathfrak{e}_4(\mathfrak{e}_4\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_5(\mathfrak{e}_5\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_6(\mathfrak{e}_6\,\mathfrak{x}) =$$
$$= \{x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), 0, 0, 0\}$$

im Eichraum $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ gilt

$$y_1 = v - u,\ y_2 = U' - \dot{V},\ y_3 = u\dot{V} - vU' + 2(U - V) - uU' + v\dot{V}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (19) sind eine integrallose Darstellung der uneigentlichen Affinsphären, welche zu den Affinminimalflächen gehören[15]. Daher ist (18) die integrallose Darstellung einer Klasse von Quasiminimalflächen des totalisotropen Raumes (17) im komplexen euklidischen R_6.

[15] Vgl. 12, § 78.

A Note Concerning Positive Matrices and M-Matrices

By

Ky Fan and A. S. Householder

Oak Ridge National Laboratory*

(Received October 1st, 1958)

1. **Notation and statement of the theorem.** For a real square matrix B with non-positive off-diagonal elements, it is known (see e.g. [1]) that the following conditions are mutually equivalent:

i) B is non-singular and $B^{-1} \geqslant 0$.[1]

ii) There exists a positive vector u such that $B\,u > 0$.[1]

iii) B and all its principal submatrices have positive determinants.

Following *Ostrowski* [3], [4], a real square matrix B with non-positive off-diagonal elements and satisfying one of the conditions i)—iii) will be called an *M-matrix*.

Let A be a square positive matrix and B an M-matrix, both of order n ($\geqslant 2$). By i), $B^{-1}A > 0$. Applying a classical theorem of *Perron* (see e.g. [1]) to the positive matrix $B^{-1}A$, there exist a unique number λ and a vector x (unique up to a positive scalar multiple) such that

$$\lambda > 0,\ x > 0; \tag{1}$$

$$A\,x = \lambda\,B\,x. \tag{2}$$

For each $k = 1, 2, \ldots, n$, let A_k denote the matrix of order n obtained from A by replacing its elements on the kth row and kth column by 0. Let B_k be defined similarly from B. Since every principal submatrix of B is an M-matrix, there exist, for each k, a unique number λ_k and a

---

* Operated by Union Carbide Corporation for the U. S. Atomic Energy Commission.

[1] A real matrix Y is said to be non- negative (positive) and we write $Y \geqslant 0$ ($Y > 0$), if all its elements are non-negative (positive). This applies to square or rectangular matrices, and also to vectors.

vector (unique up to a positive scalar multiple) $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ such that

$$\lambda_k > 0;\ x_i^{(k)} > 0 \text{ for } i \neq k, \qquad x_k^{(k)} = 0; \tag{3}$$

$$A_k\, x^{(k)} = \lambda_k\, B_k\, x^{(k)}. \tag{4}$$

The purpose of this note is to prove the following:

Theorem. *Let A be a square positive matrix and B an M-matrix, both of order $n(\geqslant 2)$. Let λ, x and λ_k, $x^{(k)}(1 \leqslant k \leqslant n)$ satisfy* (1)—(4). *Then*:

a) $\lambda > \lambda_k$ *for each* k.

b) *There exist n positive numbers c_k such that* $x = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x^{(k)}$.

c) *For any fixed index k, a positive number ϱ satisfies the inequalities $\lambda > \varrho > \lambda_k$, if and only if $A - \varrho\, B$ is non-singular and all elements on the kth column* (and on the kth row) *of* $(A - \varrho\, B)^{-1}$ *are positive.*

In case B is the identity matrix, a) is well known. Part c) generalizes an earlier result given in [1], [2], where B is the identity matrix. We shall give two essentially different proofs for b), one algebraic and the other topological.

The transpose of a matrix Y will be denoted by Y^*. The inner product of two vectors y, z will be denoted, as usual, by (y, z). The letters I, J will stand for the identity matrices of order n and $n - 1$ respectively. The ith row vector of A will be designated by a_i, that of B by b_i. The notation explained in this section will be adopted throughout the paper. Any additional notation introduced in a later section will be kept only within that section.

2. **Proof of a), b).** Let D_1 be the diagonal matrix of order n whose successive diagonal elements are the inner products $(a_i, x^{(i)})$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Let D_2 be the diagonal matrix whose successive diagonal elements are $(b_i, x^{(i)})$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Let L denote the diagonal matrix with λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ as its successive diagonal elements. From (3) and the fact that the off-diagonal elements of B are non-positive, the diagonal elements of D_2 are non-positive. Since the diagonal elements of D_1 and L are positive, so the diagonal elements of $D_1 - L\, D_2$ are all positive.

We denote by X the square matrix of order n with $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ as its successive column vectors. By (4), the kth column vector of the matrix $A\, X - D_1$ is $\lambda_k\, B_k\, x^{(k)}$. Therefore

$$A X = D_1 + (B X - D_2) L. \tag{5}$$

Clearly, the positive matrices $B^{*-1} A^*$ and $A B^{-1}$ have the same maximal eigenvalue[2] as $B^{-1} A$. So there exists a vector $y > 0$ such that $A^* y = \lambda B^* y$. Then

$$\lambda X^* B^* y = (A X)^* y, \qquad y > 0; \tag{6}$$

which combined with (5) yields

$$(\lambda I - L) X^* B^* y = (D_1 - L D_2) y > 0. \tag{7}$$

From $A > 0$ and (3), we have $A X > 0$. So (6) implies $X^* B^* y > 0$. Then it follows from (7) that the diagonal elements of $\lambda I - L$ are all positive, and a) is proved.

To prove b), we introduce

$$C = (D_1 - L D_2)^{-1} B X(\lambda I - L), \tag{8}$$

$$z = (D_1 - L D_2) y > 0. \tag{9}$$

By (3), X is non-singular. Let c be the vector determined by

$$X c = x. \tag{10}$$

Equation (5) may be written $B X = D_2 + (A X - D_1) L^{-1}$. Each diagonal element of $B X$ is equal to the corresponding element of D_2, and each off-diagonal element of $B X$ is the same as the corresponding element of $(A X - D_1) L^{-1}$. Hence the diagonal elements of $B X$ are non-positive, the off-diagonal elements of $B X$ are positive. As both $(D_1 - L D_2)^{-1}$ and $\lambda I - L$ are diagonal matrices with positive diagonal elements, (8) implies that, as far as the signs of the elements are concerned, C is of the same type as $B X$. Then we can choose a suitable positive number σ such that

$$P = C + \sigma I > 0.$$

In view of (8), (9), equation (7) becomes $C^* z = z$, or

$$P^* z = (1 + \sigma) z, \qquad z > 0.$$

Since the only positive eigenvectors of a positive matrix are those corresponding to the maximal eigenvalue (see e.g. [1]), $1 + \sigma$ must be the maximal eigenvalue of P^*, and therefore also of P.

On the other hand, from (5), (10) and (2), we have $(D_1 - L D_2) c = B X(\lambda I - L) c$, which can be written $c = C c$ or $P c = (1 + \sigma) c$.

---

[2] The *maximal eigenvalue* of a square positive matrix is that positive eigenvalue which is greater than the absolute value of any other eigenvalue.

From (10) and $x > 0$, we have $c \neq 0$, so c is an eigenvector of P. As $1 + \sigma$ is the maximal eigenvalue of P, the eigenvector c is either positive or negative. But by (3) $c < 0$ would imply $x = X c < 0$, against (1). Hence $c > 0$, which together with (10) proves b).

3. **Second proof of b).** Consider the $(n-1)$-dimensional simplex S with vertices $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Let S_i denote the $(n-2)$-dimensional face of S spanned by the vertices $x^{(1)}, \ldots, x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \ldots, x^{(n)}$. By (4),

$$(b_i, x^{(k)}) = \frac{1}{\lambda_k} (a_i, x^{(k)}) > 0 \text{ for } i \neq k.$$

As $\lambda > \lambda_k$, it follows that

$$(\lambda b_i - a_i, x^{(k)}) > (\lambda_k b_i - a_i, x^{(k)}) = 0 \text{ for } i \neq k;$$

and therefore

$$(\lambda b_i - a_i, u) > 0 \text{ for } u \in S_i. \tag{11}$$

As λ is the maximal eigenvalue of $(B^{-1} A)^*$, there is a vector $y > 0$ such that $(B^{-1} A)^* y = \lambda y$. Then

$$(y, (\lambda I - B^{-1} A) u) = 0 \text{ for any vector } u. \tag{12}$$

Since $y > 0$, this shows that no vector u can satisfy $(\lambda I - B^{-1} A) u > 0$. As $B^{-1} \geqq 0$ and each row of B^{-1} contains at least one positive element, no u can satisfy $(\lambda B - A) u > 0$. Hence

$$\operatorname*{Min}_{1 \leq i \leq n} (\lambda b_i - a_i, u) \leqslant 0 \text{ for every vector } u. \tag{13}$$

If we set

$$F_i = \{u \in S \mid (\lambda b_i - a_i, u) \leqslant 0\}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

then by (11), (13),

$$F_i \cap S_i = \Theta, \ (1 \leqslant i \leqslant n); \qquad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = S; \tag{14}$$

where Θ denotes the empty set. By a well known result of *Sperner* [5], the n closed sets F_i with property (14) must have a non-empty intersection. Let

$$v \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i. \tag{15}$$

Then $(\lambda b_i - a_i, v) \leqslant 0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$, or $(\lambda B - A) v \leqslant 0$. This implies $(\lambda I - B^{-1} A) v \leqslant 0$. But $y > 0$ and (12) holds for $u = v$, so $(\lambda I - B^{-1} A) v = 0$, and v differs from x only by a scalar multiple. On the other hand, from (15) and the first n equations in (14), v is in

the interior of S. There exist n positive numbers $d_k > 0$ such that $\sum_{k=1}^{n} d_k = 1$ and $v = \sum_{k=1}^{n} d_k x^{(k)}$, whence $v > 0$. Then v differs from x by a positive scalar multiple, and b) follows.

4. **Proof of c).** It suffices to consider the case $k = n$. We denote by C the principal submatrix of A formed by the first $n - 1$ rows and columns. Let D be defined similarly from B. Given a positive number ϱ, we partition the matrix $A - \varrho B$ as follows:

$$A - \varrho B = \begin{pmatrix} P & q \\ r & s \end{pmatrix}, \tag{16}$$

where P, q, r, s are submatrices of sizes $(n-1) \times (n-1)$, $(n-1) \times 1$, $1 \times (n-1)$ and 1×1 respectively. Then $P = C - \varrho D$. Because $\varrho > 0$, we have $q > 0$, $r > 0$.

Assuming $\lambda > \varrho > \lambda_n$, we shall prove that $A - \varrho B$ is non-singular and all elements on the nth column and nth row of $(A - \varrho B)^{-1}$ are positive. Since ϱ is greater than the maximal eigenvalue λ_n of $D^{-1} C$, by a classical result of *Frobenius* (see e.g. [1]), $D^{-1} C - \varrho J$ is non-singular and $(D^{-1} C - \varrho J)^{-1} < 0$.[3] But $D^{-1} \geqslant 0$ and every column of D^{-1} contains at least one positive element, so $P^{-1} = (D^{-1} C - \varrho J)^{-1} D^{-1}$ exists and

$$P^{-1} < 0. \tag{17}$$

From $\lambda > \varrho$ and $A x = \lambda B x$, $x > 0$, we derive

$$(A - \varrho B) x = \lambda^{-1} (\lambda - \varrho) A x > 0. \tag{18}$$

Let $x = \begin{pmatrix} y \\ x_n \end{pmatrix}$, where x_n is the nth component of x. Then (18) may be written

$$P y + q x_n > 0, \tag{19}$$

$$r y + s x_n > 0. \tag{20}$$

From (19), (17) and $r > 0$, we have $y < -P^{-1} q x_n$ and $r y < -r P^{-1} q x_n$. The last inequality combined with (20) and $x_n > 0$ gives

$$s - r P^{-1} q > 0. \tag{21}$$

Then we can define the matrix

$$\begin{pmatrix} T & u \\ v & w \end{pmatrix} \tag{22}$$

[3] We recall that J stands for the identity matrix of order $n - 1$.

by

$$\left.\begin{aligned} w &= (s - r\,P^{-1}\,q)^{-1} > 0, \\ u &= -\,P^{-1}\,q\,w > 0, \\ v &= -\,w\,r\,P^{-1} > 0, \\ T &= P^{-1}(J - q\,v). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

One verifies that the matrix (22) so defined is $(A - \varrho\,B)^{-1}$. The three inequalities in (23) are consequences of (21), (17) and $q > 0$, $r > 0$. Thus the elements on the nth column and nth row of $(A - \varrho\,B)^{-1}$ are all positive.

It remains to prove the "if" part of c). Assume for some $\varrho > 0$, we have

$$(A - \varrho\,B)^{-1} = \begin{pmatrix} T & u \\ v & w \end{pmatrix} \text{ with } u > 0,\ w > 0.$$

Then $(\varrho\,D - C)\,u = -\,P\,u = q\,w$. Since $q > 0$, $w > 0$ and $D^{-1} \geqq 0$, we have

$$(\varrho\,J - D^{-1}\,C)\,u > 0, \qquad u > 0;$$

which imply $\varrho > \lambda_n$.[4] If we set $z = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$, then $(A - \varrho\,B)\,z$ is the last column vector of I, and $(B^{-1}\,A - \varrho\,I)\,z$ is the last column vector of B^{-1}. Hence

$$(B^{-1}\,A - \varrho\,I)\,z \geqq 0,\ (B^{-1}\,A - \varrho\,I)\,z \neq 0, \qquad z > 0;$$

which imply $\varrho < \lambda$ (see (12)).

References

[1] *K. Fan*, Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements, Monatshefte für Math., 62 (1958), 219–237.

[2] *A. S. Householder*, On matrices with non-negative elements, Monatshefte für Math., 62 (1958), 238–242.

[3] *A. Ostrowski*, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Commentarii Math. Helvetici, 10 (1937), 69–96.

[4] *A. Ostrowski*, Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen, Commentarii Math. Helvetici, 30 (1956), 175–210.

[5] *E. Sperner*, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ., 6 (1928), 265–272.

[4] This is a known property of the maximal eigenvalue of a positive matrix (see e.g. [1]). It can be seen also from a relation similar to (12) for $D^{-1}\,C$.

Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung

Von

W. Wunderlich, Wien

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 7. Oktober 1958)

1. Unter einem *„äquidistanten Kurvenpaar"* wird ein Kurvenpaar des dreidimensionalen euklidischen Raumes verstanden, welches ein gemeinsames Normalensystem besitzt. Solche Kurvenpaare, wie sie von irgend zwei Orthogonaltrajektorien der Erzeugendenschar einer beliebigen Strahlfläche gebildet werden, sind seinerzeit ausführlich von *A. Voss* untersucht worden[1]. Die Entfernung entsprechender Punkte der beiden Kurven ist, wie man leicht einsieht, konstant. Gibt man daher eine der beiden Kurven und die Entfernung c willkürlich vor, dann kann für die zweite irgendeine Linie genommen werden, die auf der im Abstand c um die erste Kurve gelegten Rohrfläche verläuft, von den charakteristischen Kreisen derselben abgesehen.

Über eigenartige Beziehungen bei äquidistanten Kurvenpaaren, deren beide Bestandteile in zwei zueinander *normalen Ebenen* liegen, hat der Verfasser kürzlich berichtet[2]. Hierbei wurde der Begriff der *„Schränkung"* eingeführt, das ist der — im allgemeinen veränderliche — Winkel ω entsprechender Tangenten. Insbesondere wurden die auf zwei normale Ebenen verteilten äquidistanten Kurvenpaare *konstanter Schränkung* bestimmt, während *Voss* die auf zwei *beliebige Ebenen* verteilten äquidistanten Kurvenpaare mit *normaler Schränkung* ermittelt hatte. In beiden Fällen ergaben sich für die Teilkurven *Meridiane von Drehflächen konstanter positiver Krümmung.*

---

[1] *A. Voss*: Über Kurvenpaare im Raume. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1909, Nr. 19, 1—106.

[2] *W. Wunderlich*: Äquidistante Kurvenpaare in normalen Ebenen. Archiv d. Math. (im Druck).

Die vorliegende Note erbringt nun den Nachweis, daß die genannten Kurven ganz allgemein als Bestandteile jener *äquidistanten Kurvenpaare konstanter Schränkung* auftreten, die sich auf zwei *Ebenen beliebiger Neigung* verteilen. Damit ergibt sich im übrigen eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der *Villarceau*schen Loxodromenkreise des Torus.

2. In den beiden Kurvenebenen, die den Winkel $\alpha \leqq \pi/2$ miteinander einschließen mögen, seien kartesische Koordinatensysteme x, y bzw. u, v mit einer gemeinsamen Achse für x und u eingeführt (Abb. 1). Zusammengehörige Punkte des Kurvenpaares können dann in dem erweiterten Raumkoordinatensystem x, y, z durch $P_1(x, y, 0)$ und $P_2(u, v\cos\alpha, v\sin\alpha)$ angesetzt werden. Die zusammengehörigen Fortschreitrichtungen sind sodann gekennzeichnet durch die Tangentenvektoren

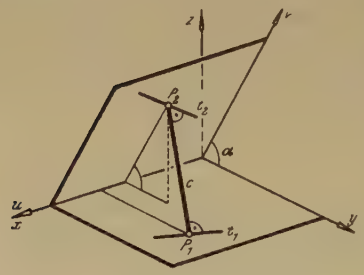

Abb. 1

$$\mathfrak{t}_1(dx : dy : 0) \text{ und } \mathfrak{t}_2(du : dv\cos\alpha : dv\sin\alpha).$$

Die beiden *Orthogonalitätsbedingungen* $P_1 P_2 \perp \mathfrak{t}_i$ finden darnach ihren Ausdruck durch

$$\begin{aligned} (x-u)\,dx + (y - v\cos\alpha)\,dy &= 0, \\ (x-u)\,du + (y - v\cos\alpha)\,dv\cos\alpha - v\sin\alpha\,.\,dv\sin\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Integration der Differenz liefert die behauptete *Abstandskonstanz*

$$(x-u)^2 + (y - v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2 = c^2. \tag{2}$$

Die *Schränkung* $\omega = \sphericalangle\, \mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2$ berechnet sich schließlich aus

$$\cos\omega = \frac{dx\,du + dy\,dv\cos\alpha}{\sqrt{dx^2+dy^2}\,\sqrt{du^2+dv^2}}. \tag{3}$$

Die gesuchten *äquidistanten Paare ebener Kurven mit fester Schränkung* sind mithin durch die Gleichungen (1), (2) und (3) unter der Voraussetzung α, c, $\omega = \text{const}$ bestimmt, wobei eine der Gleichungen (1) entbehrlich ist. Das Gleichungssystem sieht nicht sehr einladend aus, läßt sich aber trotzdem weitgehend auflösen.

3. Schreibt man abkürzend für $x - u = \xi$ und $v - y\cos\alpha = \eta$, so lauten die Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned} \xi\, dx &= (\eta \cos\alpha - y \sin^2\alpha)\, dy, \\ \xi\, du &= \eta\, dv, \\ \xi^2 + \eta^2 &= c^2 - y^2 \sin^2\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Löst man die erste und dritte Gleichung nach ξ und η auf, wobei $dx/dy = x'$ gesetzt wird, so erhält man

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-x'\, y \sin^2\alpha \pm \cos\alpha \sqrt{c^2(x'^2 + \cos^2\alpha) - y^2 \sin^2\alpha (x'^2+1)}}{x'^2 + \cos^2\alpha}, \\ \eta &= \frac{y \sin^2\alpha \cos\alpha \pm x' \sqrt{c^2(x'^2 + \cos^2\alpha) - y^2 \sin^2\alpha (x'^2+1)}}{x'^2 + \cos^2\alpha}. \end{aligned} \tag{5}$$

Auf Grund der zweiten Gleichung (4) nimmt die Bedingung (3) folgende Gestalt an:

$$\sqrt{x'^2+1}\,.\,\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,.\,\cos\omega = \eta\, x' + \xi \cos\alpha. \tag{6}$$

Geht man hier mit den Werten von ξ und η gemäß (5) ein, so gelangt man zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\sqrt{x'^2+1}\,.\,\sqrt{c^2 - y^2\sin^2\alpha}\,.\cos\omega = \pm\sqrt{c^2(x'^2+\cos^2\alpha) - y^2\sin^2\alpha(x'^2+1)},$$

die sich auf die Gestalt

$$x'^2(c^2 - y^2\sin^2\alpha)\sin^2\omega = y^2\sin^2\alpha\sin^2\omega + c^2(\sin^2\alpha - \sin^2\omega) \tag{7}$$

bringen läßt. Aus dieser gewinnt man dann schließlich nach Trennung der Variablen die Lösung

$$x = \int \sqrt{\frac{y^2+a^2}{b^2-y^2}}\, .\, dy \text{ mit } \begin{aligned} a^2 &= c^2(\csc^2\omega - \csc^2\alpha), \\ b^2 &= c^2 \csc^2\omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Da das aufzulösende Gleichungssystem (1), (2), (3) den gleichzeitigen Tausch von x mit u und y mit v verträgt, folgt analog:

$$u = \int \sqrt{\frac{v^2+a^2}{b^2-v^2}}\, dv. \tag{9}$$

4. Wie schon der Fragestellung nach zu erwarten war, besteht mithin das gesuchte äquidistante Kurvenpaar aus zwei *kongruenten Bestandteilen* k_1 und k_2. Diese durch (8) und (9) dargestellten Kurven sind im übrigen als *Meridiane von Drehflächen konstanter positiver Krümmung* wohlbekannt[3]. Der größte Parallelkreis hat dabei den Radius b, die

[3] *G. Darboux*: Leçons sur la théorie générale des surfaces, I (Paris 1887), 79. *G. Scheffers*: Einführung in die Theorie der Kurven (Leipzig 1908), 293. *K. Strubecker*: Differentialgeometrie III (Sammlg. Göschen 1180/1180a, Berlin, 1958), 141.

Flächenkrümmung den Wert $K = 1/(a^2 + b^2) = c^{-2} \sin^2 \omega$.

Bei den genannten Flächen und somit auch bei den vorliegenden Kurvenpaaren sind *drei Typen* zu unterscheiden (die Winkel α und ω können dabei auf den ersten Quadranten beschränkt bleiben):

I. $\omega < \alpha$ ($a^2 > 0$, Abb. 2). Die Kurven haben das Aussehen von Wellenlinien und entstehen, wie *G. Scheffers* gezeigt hat, als Randkurven

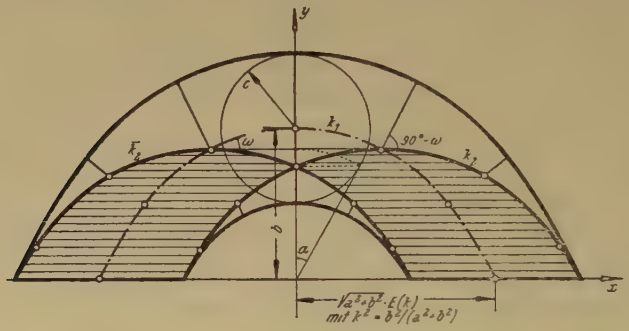

Abb. 2. Annahme: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ ($\alpha = 30^0$, $\omega = 26{,}6^0$)

bei der Abwicklung eines schiefen Kreiszylinders[4]. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind vom „Spindeltypus".

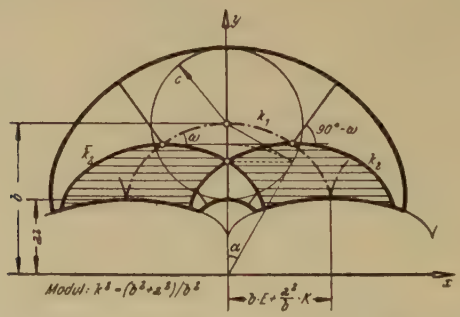

Abb. 3. Annahme: $a = i$, $b = 2$, $c = 1$ ($\alpha = 30^0$, $\omega = 35{,}2^0$).

II. $\omega > \alpha$ ($a^2 < 0$, Abb. 3). Die Kurven haben das Aussehen von gemeinen Zykloiden und können, wie der Verfasser bemerkt hat, durch Aufbiegen eines Kreissegmentes erzeugt werden, wenn Sehne und Bogen

[4] *G. Scheffers*: Zusammenhang zwischen der Abwicklung eines Kreiszylinders und den Rotationsflächen konstanter Krümmung. Archiv Math. Phys., III. Reihe, 6 (1903), 249–250.

dabei eben bleiben[5]. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind vom „Wulsttypus".

III. $\omega = \alpha$ (a=0). In diesem Grenzfall ergeben sich *Kreise* vom Radius b. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind Kugeln.

Mit Rücksicht auf eine eingangs gemachte Bemerkung, derzufolge k_2 auf jener *Rohrfläche* verläuft, die im Abstand c um die Mittellinie k_1 gelegt werden kann, und wegen $\sin \alpha = c/b$, gilt folgender

Satz: Schneidet man eine Rohrfläche Φ, die einen Meridian k_1 einer Drehfläche konstanter positiver Krümmung zur Mittellinie hat, mit einer die Drehflächenachse enthaltenden Tangentialebene, so erhält man zwei zu k_1 kongruente Schnittkurven k_2 und $\overline{k}_2$, die mit k_1 je ein äquidistantes Kurvenpaar bilden und die Schar der charakteristischen Kreise von Φ unter konstantem Winkel durchsetzen.

Hierin ist eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der *Villarceau*schen *Loxodromenkreise des Torus* zu erblicken, auf die man im Grenzfall III stößt.

5. Um die *Phasenverschiebung* der kongruenten Bestandteile k_1 und k_2 festzustellen, eliminieren wir ξ aus den ersten beiden Gleichungen (4), schreiben statt η wiederum $v - y \cos \alpha$ und drücken schließlich dx/dy und du/dv gemäß (8) bzw. (9) durch y bzw. v aus. Auf diese Weise gelangen wir zu einer (algebraischen) Beziehung zwischen y und v, die sich nach einigen Umformungen und Kürzung durch $y^2 - v^2$ auf folgende Form bringen läßt:

$$c^2v^2y^2+(a^2+b^2-c^2)b^2(v^2+y^2)-2(a^2+b^2)b\sqrt{b^2-c^2}\,.\,vy-a^2b^2c^2=0 \quad (10)$$

oder

$$\sin^2\alpha \sin^2\omega\,.v^2\,y^2+c^2\cos^2\omega\,.(v^2+y^2)-2\,c^2\cos\alpha\,.vy-c^4\,(1-\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\alpha})=0 \quad (11)$$

Insbesondere gehören, wie auch in Abb. 2 und 3 erkennbar, zu $v = 0$ die Werte $y = \pm a \operatorname{tg} \omega$ und zu $v = b$ der Wert $y = c \operatorname{ctg} \alpha$.

6. Die von den gemeinsamen Normalen eines der hier betrachteten Kurvenpaare gebildete *Strahlfläche* Σ ist im allgemeinen, d. h. für $a \neq 0$, *transzendent*, da sie von den beiden Kurvenebenen nach den

[5] *W. Wunderlich*: Aufgabe 300 (mit Auflösung). Elemente d. Math. **13** (1958), 113–114.

transzendenten Kurven k_1, k_2 geschnitten wird. Die algebraische Beziehung (10) hat jedoch eine algebraische Eigenschaft von Σ zur Folge, nämlich die Existenz eines *algebraischen Berührungszylinders* Ψ mit x-parallelen Erzeugenden. Die durch eine Erzeugende von Σ gehende x-parallele Ebene schneidet ja auf der y-Achse und der v-Achse Stücke ab, die durch die (2,2)-Korrespondenz (10) miteinander verknüpft sind; der Zylinder Ψ ist mithin von *4. Klasse.*

Führt man in dem schiefwinkligen x, y, v-System vermöge $\lambda x + \mu y + \nu z = 1$ inhomogene Ebenenkoordinaten λ, μ, ν ein, so erhält man die Gleichung des Zylinders Ψ einfach dadurch, daß man in (10) y durch μ^{-1} und v durch ν^{-1} ersetzt; sie lautet demnach

$$a^2b^2c^2\mu^2\nu^2 + 2(a^2+b^2)\,b\sqrt{b^2-c^2}\,.\,\mu\nu - (a^2+b^2-c^2)\,b^2(\mu^2+\nu^2) - c^2 = 0. \quad (12)$$

Man bestätigt damit im Falle $a \neq 0$ die angegebene Zylinderklasse 4 und erkennt leicht, wenn man μ bzw. ν über alle Schranken wachsen läßt, daß die Ebenen von k_1 und k_2 den Zylinder doppelt berühren. Da keine weitere Doppeltangentialebene vorhanden ist, liefert die Plücker-Formel die *Ordnung 8.*

In dem durch $a = 0$ gekennzeichneten Grenzfall III reduziert sich der Grad von (12) und damit die Klasse von Ψ auf 2. Nähere Untersuchung ergibt, daß Ψ ein *gleichseitig-hyperbolischer Zylinder* wird. Die Strahlfläche Σ, die hier algebraisch und vom 4. Grade ist (VII. Art nach *Sturm*), wurde seinerzeit von *J. Krames* als „Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises" eingehend studiert[6].

[6] *J. Krames*: Die Striktionslinie der Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **128** (1919), 1—12. *E. Müller-J. Krames*: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Wien 1931), 283.

Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew

Von

P. Lesky und **A. Kaiser**, Innsbruck*

(Eingegangen am 15. Oktober 1958)

Einleitung: Die Interpolationsaufgabe, ein Polynom $p(x)$ eines Grades $\leqq N$ zu bestimmen, das an den äquidistanten Stellen $x = 0, 1, 2, \ldots, N$ die vorgegebenen Werte $p_0, p_1, \ldots, p_N$ annimmt, wird am schnellsten gelöst, wenn man Polynome $y_\nu(x)$ der Grade $\nu = 0, 1, \ldots, N$ kennt, welche den Orthogonalitätsrelationen (2) genügen ($y_\nu(n) = y_{\nu n}$ gesetzt). Dann gilt nämlich

$$p(x) = c_0\, y_0(x) + c_1\, y_1(x) + \ldots + c_N\, y_N(x)$$

mit den „Fourierkoeffizienten":

$$c_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu} \sum_{n=0}^{N} p_n\, y_{\nu n}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, N.$$

Zweck dieser Arbeit ist es vor allem zu zeigen, daß auch diese diskreten und endlichen Orthogonalsysteme, genau so wie die kontinuierlichen und unendlichen Systeme, am einfachsten durch Lösung eines Minimum-Problems mit Hilfe der Variationsrechnung konstruiert werden können; diese Methode ist also ganz allgemein anwendbar und gibt auch die Erklärung für die eigentümliche Gestalt der Polynome, die sonst gewöhnlich im Dunkeln gelassen oder als ein glücklicher Zufall hingestellt wird. Außerdem dürfte es interessant sein, ein derartiges Variationsproblem in der Differenzenrechnung behandelt zu sehen.

W. Gröbner.

Stellen wir die Aufgabe, Polynome ν-ten Grades in n mit reellen Koeffizienten

$$y_{\nu n} = a_{\nu 0} + \binom{n}{1} a_{\nu 1} + \ldots + \binom{n}{\nu} a_{\nu\nu} \quad (\nu, n = 0, 1, 2, \ldots, N) \tag{1}$$

zu bilden, die den Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}\, y_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \sigma_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \tag{2}$$

genügen, dann lösen die *orthogonalen Polynome*, die in der Statistik häufig verwendet werden und deren erste Berechnung auf *Tschebyschew*[1]

---

* Diese Arbeit wurde im Mathematischen Institut der Universität Innsbruck ausgeführt.

[1] Eine erschöpfende Literaturangabe findet man in [1], S. 155.

zurückgeht, dieses Problem. In dieser Arbeit sollen die *orthogonalen Polynome* nach einem Verfahren berechnet werden, das auf einem Variationsprinzip beruht, und außerdem weitere interessante Eigenschaften der Polynome angegeben werden.

1. Aufstellung und Lösung des Variationsproblems. Erklären wir die Differenzen der Polynome (1) in folgender Art

$$\Delta^0 y_{\nu n} = y_{\nu n},\ \Delta^k y_{\nu n} = y_{\nu, n+k} - \binom{k}{1} y_{\nu, n+k-1} + \ldots + (-1)^k y_{\nu n}\ (k = 1, 2, \ldots), \quad (3)$$

dann ist die ν-te Differenz

$$\Delta^\nu y_{\nu n} = a_{\nu\nu} \neq 0.$$

Die Orthogonalitätsbedingungen (2) können wir durch ein Variationsproblem ersetzen: Nach einem Hilfssatz von *W. Gröbner*[2] entspricht nämlich die Forderung

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}^2 = \text{Min!} \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots, N$$

unter der Nebenbedingung, daß der ν-te Koeffizient der Polynome (1) festbleibt, gerade den Orthogonalitätsbedingungen (2). Fügen wir diese Nebenbedingung mit einem Lagrange-Faktor $2\lambda_n$ zur obigen Minimalbedingung, so erhalten wir das Variationsproblem

$$\Omega = \sum_{n=0}^{N} [y_{\nu n}^2 + 2\lambda_n(\Delta^\nu y_{\nu n} - a_{\nu\nu})] = \text{Min!} \quad (4)$$

Durch Überlagerung einer willkürlichen Zahlenfolge $\{z_n\}$ variieren wir

$$\Omega(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \{[y_{\nu n} + \varepsilon z_n]^2 + 2\lambda_n[\Delta^\nu(y_{\nu n} + \varepsilon z_n) - a_{\nu\nu}]\} = \text{Min!}$$

$\Omega(\varepsilon)$ hat als Funktion von ε für $\varepsilon = 0$ ein Minimum; daher muß

$$\delta\Omega = \left(\frac{\partial\Omega(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 2\sum_{n=0}^{N} [y_{\nu n} z_n + \lambda_n \Delta^\nu z_n] = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, N \quad (5)$$

sein.

Diese Bedingung (5) muß für jede beliebige Folge $\{z_n\}$ erfüllt sein, daher versuchen wir (5) so umzuformen, daß eine Ausklammerung der willkürlichen z_n gelingt. Indem wir die partielle Summation

$$\sum_{n=a}^{b} u_n \Delta v_n = [u_n v_n]_{n=a}^{n=b+1} - \sum_{n=a}^{b} v_{n+1} \Delta u_n, \quad (6)$$

[2] Die entsprechenden Arbeiten sind in [2] und [3] zitiert.

die dem Sinne nach der partiellen Integration entspricht, auf das zweite Glied in (5) wiederholt anwenden, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n \Delta^\nu z_n = [\lambda_n \Delta^{\nu-1} z_n - \Delta \lambda_n \Delta^{\nu-2} z_{n+1} + \ldots + \\ + (-1)^{\nu-1} \Delta^{\nu-1} \lambda_n \cdot z_{n+\nu-1}]_{n=0}^{n=N+1} + (-1)^\nu \sum_{n=0}^{N} \Delta^\nu \lambda_n \cdot z_{n+\nu}.$$

Formen wir die in dieser Gleichung rechts stehende Summe um

$$\sum_{n=0}^{N} \Delta^\nu \lambda_n \cdot z_{n+\nu} = \sum_{n=0}^{N} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n + \sum_{n=N+1}^{N+\nu} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n - \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n,$$

dann entsteht für die Variation (5) letzten Endes

$$\frac{1}{2} \delta \Omega = \sum_{n=0}^{N} [y_{\nu n} + (-1)^\nu \Delta^\nu \lambda_{n-\nu}] z_n - \\ - [\lambda_0 \Delta^{\nu-1} z_0 - \Delta \lambda_0 \Delta^{\nu-2} z_1 + \ldots + (-1)^{\nu-1} \Delta^{\nu-1} \lambda_0 \cdot z_{\nu-1}] + \\ + (-1)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n + [\lambda_{N+1} \Delta^{\nu-1} z_{N+1} - \Delta \lambda_{N+1} \Delta^{\nu-2} z_{N+2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{\nu-1} \Delta^{\nu-1} \lambda_{N+1} \cdot z_{N+\nu}] + (-1)^\nu \sum_{n=N+1}^{N+\nu} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n. \qquad (7)$$

Die Variation $\delta \Omega$ muß bei jeder Wahl der Folge $\{z_n\}$ verschwinden; wählen wir etwa $z_k = 1$ $(\nu \leqq k \leqq N)$ und alle übrigen z_i gleich null, dann folgt aus (7), wenn wir wieder n statt k schreiben

$$y_{\nu n} = (-1)^{\nu+1} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \text{ für } \nu \leqq n \leqq N; \qquad (8)$$

das bedeutet aber, daß der Lagrange-Faktor ein Polynom des Grades 2ν in n sein muß. Lassen wir die Gleichung (8) auch für $n = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ gelten, so entspricht dies einer Festlegung des Lagrange-Faktors für negative Indizes; diese ist ohne weiteres möglich, denn im Variationsprinzip (4) kommen die λ_n mit negativem Index nicht vor und sind daher frei wählbar. Haben wir λ_n so gewählt, dann verschwindet überhaupt die erste Summe in (7); in den übrigen Gliedern lösen wir die Differenzen von z_n und $\lambda_{n-\nu}$ entsprechend der Gleichung (3) auf und erhalten[3]

[3] In [5] findet man eine ausführlichere Darstellung dieser Berechnung an einem ähnlichen Fall.

$$\frac{1}{2}\delta\,\Omega = \sum_{k=1}^{\nu}(-1)^k z_{\nu-k}\Big[\sum_{j=0}^{\nu-k}(-1)^j\lambda_j\{\tbinom{\nu-j-1}{k-1} + \tbinom{j+1}{1}\tbinom{\nu-j-2}{k-1} + \ldots +$$

$$+ \tbinom{\nu-k}{\nu-k-j}\tbinom{k-1}{k-1} - \tbinom{\nu}{k+j}\} + \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\lambda_{-j-1}\tbinom{\nu}{k-j-1}\Big] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1} z_{N+1+\nu-k}\Big[\sum_{j=0}^{\nu-k}(-1)^j\lambda_{N+1+j}\{\tbinom{\nu-j-1}{k-1} + \tbinom{j+1}{1}\tbinom{\nu-j-2}{k-1} + \ldots +$$

$$+ \tbinom{\nu-k}{\nu-k-j}\tbinom{k-1}{k-1} - \tbinom{\nu}{k+j}\} + \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\lambda_{N-j}\tbinom{\nu}{k-j-1}\Big].$$

Die Ausdrücke in den geschlungenen Klammern sind null, denn es gilt[4]

$$\sum_{s=0}^{p-m}\tbinom{p-s}{m}\tbinom{j+s}{j} = \tbinom{p+j+1}{p-m}$$

und es bleibt

$$\frac{1}{2}\delta\,\Omega = -z_{\nu-1}\cdot\lambda_{-1} + z_{\nu-2}[\tbinom{\nu}{1}\lambda_{-1} - \lambda_{-2}] - \ldots + (-1)^\nu z_0[\tbinom{\nu}{\nu-1}\lambda_{-1} -$$

$$- \tbinom{\nu}{\nu-2}\lambda_{-2} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\lambda_{-\nu}] + z_{N+\nu}\lambda_N - z_{N+\nu-1}[\tbinom{\nu}{1}\lambda_N - \lambda_{N-1}] +$$

$$+ \ldots + (-1)^{\nu+1} z_{N+1}[\tbinom{\nu}{\nu-1}\lambda_N - \tbinom{\nu}{\nu-2}\lambda_{N-1} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\lambda_{N+1-\nu}].$$

Dieser Ausdruck muß ebenfalls für jede Wahl von $\{z_n\}$ verschwinden. Setzt man $z_{\nu-1} = 1$ und alle anderen z_k gleich null, so folgt $\lambda_{-1} = 0$. Setzt man $z_{\nu-2} = 1$ und alle anderen z_k null, so muß auch $\lambda_{-2} = 0$ sein, denn λ_{-1} ist bereits null. So weiter schließend findet man die Bedingung, daß alle λ_{-j-1} und λ_{N-j} für $j = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$ gleich null sein müssen. Das Polynom des Grades 2ν in n, das den Lagrange-Faktor darstellt, kann daher, abgesehen von einem konstanten Normierungsfaktor, nur die Form

$$\lambda_n = \tbinom{n+\nu}{\nu}\tbinom{n+\nu-N-1}{\nu}$$

haben. Indem wir einen Vorzeichenwechsel in diesen Normierungsfaktor einbeziehen, erhalten wir als endgültige Darstellung des Lagrange-Faktors und der nicht normierten Polynome

$$\lambda_{n-\nu} = (-1)^{\nu+1}\tbinom{n}{\nu}\tbinom{n-N-1}{\nu},\quad y_{\nu n} = \Delta^\nu\{\tbinom{n}{\nu}\tbinom{n-N-1}{\nu}\};\quad \nu,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{9}$$

2. Normierung der Polynome. Die in (9) auftretende Differenz können wir nach (3) entwickeln und erhalten so die Darstellung

[4] Vergleiche mit [6], S. 251.

$$y_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n+k}{\nu} \binom{n+k-N-1}{\nu} (-1)^{\nu-k}. \qquad (9')$$

Diese Form ist aber zur Berechnung der orthogonalen Polynome nicht gut geeignet, da sie Potenzen höheren als ν-ten Grades in n enthält, die sich erst beim Ausrechnen wegheben. Wir suchen daher eine andere Darstellung, in der n von vornherein höchstens in der ν-ten Potenz vorkommt. Zu diesem Zweck zerlegen wir die ν-te Differenz in (9) nach der Produktregel der Differenzenrechnung und erhalten

$$y_{\nu n} = \Delta^{\nu}\left\{\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu}\right\} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \Delta^{k}\binom{n}{\nu} \Delta^{\nu-k}\binom{n+k-N-1}{\nu}.$$

Die darin enthaltenen Differenzen lassen sich leicht berechnen

$$\Delta^{k}\binom{n}{\nu} = \binom{n}{\nu-k}, \quad \Delta^{\nu-k}\binom{n+k-N-1}{\nu} = \binom{n+k-N-1}{k},$$

so daß letzten Endes durch deren Einsetzen

$$y_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n}{\nu-k} \binom{n+k-N-1}{k}; \quad \nu, n = 0, 1, \ldots, N \qquad (9'')$$

entsteht.

Zur Normierung der Polynome bilden wir, indem wir wiederum sukzessive die partielle Summation anwenden,

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}^2 = \sum_{n=0}^{N} \Delta^{\nu}\left\{\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu}\right\} y_{\nu n} = \left[\Delta^{\nu-1}\left\{\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu}\right\} y_{\nu n} -\right.$$

$$\left. -\Delta^{\nu-2}\left\{\binom{n+1}{\nu}\binom{n-N}{\nu}\right\}\Delta\, y_{\nu n} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\binom{n+\nu-1}{\nu}\binom{n+\nu-N-2}{\nu}\Delta^{\nu-1} y_{\nu n}\right]_{n=0}^{n=N+1} +$$

$$+ (-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\nu}{\nu}\binom{n+\nu-N-1}{\nu}\Delta^{\nu} y_{\nu n}.$$

Die in der eckigen Klammer auftretenden fallenden Differenzen können einfach als Summen dargestellt werden

$$\Delta^{\nu-j-1}\left\{\binom{n+j}{\nu}\binom{n+j-N-1}{\nu}\right\} = \sum_{k=0}^{\nu-j-1} \binom{\nu-j-1}{k}\binom{n+j+k}{\nu}\binom{n+j+k-N-1}{\nu}(-1)^{\nu-j-k-1},$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1,$$

die sowohl für $n = 0$ als auch $n = N+1$ verschwinden, so daß nur die letzte Summe zur Berechnung des Normierungsfaktors bleibt. Bei der Berechnung der ν-ten Differenz von $y_{\nu n}$ mit Hilfe von (9) liefert nur das Glied der 2ν-ten Potenz in n einen Beitrag

$$\Delta^{\nu} y_{\nu n} = \Delta^{\nu}\left[\Delta^{\nu}\frac{n^{2\nu}}{\nu!\,\nu!}\right] = \binom{2\nu}{\nu}; \qquad (10)$$

außerdem findet man für die Summe[5]

$$(-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\nu}{\nu} \binom{n+\nu-N-1}{\nu} = \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\nu}{\nu} \binom{N-n}{\nu} = \binom{N+\nu+1}{N-\nu}$$

und daher letzten Endes

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}^2 = \binom{N+\nu+1}{N-\nu} \binom{2\nu}{\nu}.$$

Die normierten Polynome $r_{\nu n}$ haben also die Form

$$r_{\nu n} = \left[\binom{N+\nu+1}{N-\nu} \binom{2\nu}{\nu}\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n}{\nu-k} \binom{n+k-N-1}{k}; \quad \nu, n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

3. Die Tschebyschewschen Polynome für ein symmetrisches Intervall und Ableitung einer Rekursionsformel. In der Literatur[6] findet man die orthogonalen Polynome meistens mit normiertem höchsten Koeffizienten ($a_{\nu\nu} = 1$) und auf einen (bezüglich der Null) symmetrisch liegenden Orthogonalitätsbereich bezogen. Es sollen daher auch unsere Polynome $y_{\nu n}$ in diese Form gebracht werden, einerseits um eine Vergleichsmöglichkeit zu erhalten, andererseits um auf einfache Art eine Rekursionsformel für die Polynome herleiten zu können.

Aus Formel (10) läßt sich unmittelbar $a_{\nu\nu}$ berechnen

$$a_{\nu\nu} = \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^3},$$

so daß die nicht normierten Polynome, wenn der Koeffizient der höchsten n-Potenz eins sein soll, lauten

$$y_{\nu n}^{*} = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n}{\nu-k} \binom{n+k-N-1}{k}. \tag{12}$$

Indem wir außerdem die Transformation $n = x + \frac{N}{2}$ durchführen, durch die unser Orthogonalitätsbereich $[0, N]$ in den Bereich $[-\frac{N}{2}, +\frac{N}{2}]$ übergeführt wird[7], erhalten wir

---

[5] Vergleiche mit [6], S. 251.

[6] Die in diesem Punkt hergeleiteten Formeln für die orthogonalen Polynome findet man in [1], S. 156, während die Rekursionsformel in ähnlicher Art und Weise in [4], S. 209—210 hergeleitet wird.

[7] x ist natürlich unter Umständen nicht ganzzahlig. In der Praxis pflegt man N gerade zu wählen, um x ganzzahlig zu erhalten; vergleiche zum Beispiel als praktische Anwendung [7], S. 16—22.

$$z_{\nu x} = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!} \Delta^\nu \binom{x+\frac{N}{2}}{\nu} \binom{x-\frac{N}{2}-1}{\nu} = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{x+\frac{N}{2}}{\nu-k} \binom{x+k-\frac{N}{2}-1}{k}, \quad (13)$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, N; \; x = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, +\frac{N}{2}.$$

Die ersten sechs Polynome sollen zum praktischen Gebrauch ausführlich angeschrieben werden:

$$z_{0x} = 1,$$

$$z_{1x} = x,$$

$$z_{2x} = x^2 - \frac{(N+1)^2 - 1}{12},$$

$$z_{3x} = x^3 - \frac{3(N+1)^2 - 7}{20} x,$$

$$z_{4x} = x^4 - \frac{3(N+1)^2 - 13}{14} x^2 + \frac{3(N+1)^4 - 30(N+1)^2 + 27}{560},$$

$$z_{5x} = x^5 - \frac{5(N+1)^2 - 35}{18} x^3 + \frac{15(N+1)^4 - 20(N+1)^2 + 407}{1008} x.$$

Aus der Darstellung (13) sieht man unmittelbar, wenn man etwa die Summe zerlegt anschreibt und die gleichweit von den Enden stehenden Glieder vergleicht, daß sich die Glieder mit $x^{\nu-1}$, $x^{\nu-3}$, $x^{\nu-5}$ usw. wegheben. Diese Tatsache wird es uns gestatten, auf einfache Weise eine Rekursionsformel für die orthogonalen Polynome herzuleiten. Es gibt dann nämlich eine Beziehung

$$x \cdot z_{\nu,x} = z_{\nu+1,x} + D_{\nu,1} \cdot z_{\nu-1,x} + D_{\nu,2} \cdot z_{\nu-3,x} + \ldots, \quad (14)$$

in der der konstante Koeffizient $D_{\nu,1}$ so bestimmt wird, daß der Koeffizient von $x^{\nu-1}$ mit dem entsprechenden Koeffizienten in $x \cdot z_{\nu,x}$ übereinstimmt, $D_{\nu,2}$ so, daß der Koeffizient von $x^{\nu-3}$ übereinstimmt usw.

Geht man ebenso wie bei der Normierung der Polynome (Punkt 2) vor, indem man sukzessive die partielle Summation anwendet, dann findet man

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x} \cdot x^\mu = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!} \sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} \Delta^\nu \binom{x+\frac{N}{2}}{\nu} \binom{x-\frac{N}{2}-1}{\nu} \cdot x^\mu \begin{cases} = 0 \text{ für } \mu < \nu \\ \neq 0 \text{ für } \mu = \nu \end{cases} \quad (15)$$

und sieht sofort auch die Gültigkeit der weiteren Beziehungen

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x} \cdot z_{\mu,x} \cdot x \begin{cases} = 0 \text{ für } \mu > \nu + 1 \\ \quad\; \nu > \mu + 1 \\ \neq 0 \text{ für } \nu = \mu \pm 1 \end{cases}$$

ein. Da nur die höchste x-Potenz bei der Normierung einen Beitrag liefert, gilt

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu-1,x} \cdot z_{\nu,x} \cdot x = \sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x}^2 = \frac{(\nu!)^4}{(2\nu)!} \binom{N+\nu+1}{N-\nu}. \tag{16}$$

Wir multiplizieren nun (14) mit $z_{\nu-1,x}$ und summieren über den Orthogonalitätsbereich; dann folgt

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} x \cdot z_{\nu,x} \cdot z_{\nu-1,x} = D_{\nu,1} \sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu-1,x}^2,$$

denn wegen der Orthogonalität der $z_{k,x}$ entfallen alle übrigen rechts stehenden Glieder. Daraus erhalten wir für $D_{\nu,1}$ unter Verwendung von (16)

$$D_{\nu,1} = \sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x}^2 \left[\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu-1,x}^2 \right]^{-1} = \frac{(N+\nu+1)(N-\nu+1)\nu^2}{4(4\nu^2-1)}. \tag{17}$$

Die übrigen konstanten Koeffizienten in (14) sind alle null: Multipliziert man nämlich (14) mit $x^{\nu-3}$ und summiert über den Orthogonalitätsbereich, dann ist die linke Seite nach (15) null und auf der rechten Seite bleibt $D_{\nu,2}$ als Faktor eines von null verschiedenen Gliedes stehen, das heißt es muß $D_{\nu,2} = 0$ sein. Durch Multiplikation mit $x^{\nu-5}$ zeigt sich dasselbe für $D_{\nu,3}$ usw.

Nachdem alle konstanten Koeffizienten in (14) berechnet sind, finden wir durch Einsetzen von $D_{\nu,1}$ aus (17) in (14) die Rekursionsformel

$$4(4\nu^2-1)\, z_{\nu+1,x} - 4(4\nu^2-1)\, x z_{\nu,x} + (N+\nu+1)(N-\nu+1)\nu^2 z_{\nu-1,x} = 0, \tag{18}$$

die für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, N$ gilt. Transformieren wir wieder auf unsere ursprünglichen Polynome $y_{\nu n}$ zurück, dann haben wir für diese die Rekursionsformel

$$(\nu+1)^2 y_{\nu+1,n} - (2n-N)(2\nu+1) y_{\nu,n} + \\ + (N+\nu+1)(N-\nu+1) y_{\nu-1,n} = 0, \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{19}$$

mit der Festlegung $y_{-1,n} = 0$.

4. Christoffelsche Summenformel und Abschätzung der Polynome. Wir dividieren die Rekursionsformel (19) durch $(N+\nu+1)(\nu+1)$, multiplizieren diesen neuen Ausdruck mit $y_{\nu,m}$ $(m=0, 1, 2, \ldots, N)$ und erhalten

$$\frac{(2n-N)(2\nu+1)}{(N+\nu+1)(\nu+1)} y_{\nu,n}\, y_{\nu,m} = \frac{(\nu+1)}{(N+\nu+1)} y_{\nu+1,n}\, y_{\nu,m} + \frac{(N-\nu+1)}{(\nu+1)} y_{\nu-1,n}\, y_{\nu,m}.$$

Vertauscht man in dieser Formel n und m und zieht die so entstehende Beziehung von der ursprünglichen ab, dividiert dann noch durch $\binom{N+\nu}{\nu}\binom{N+1}{\nu+1}$, so entsteht

$$2(n-m)(2\nu+1)\left[\binom{N+\nu+1}{\nu+1}\binom{N+1}{\nu+1}(\nu+1)^2\right]^{-1} y_{\nu,n}\, y_{\nu,m} =$$
$$= \left[\binom{N+\nu+1}{\nu+1}\binom{N+1}{\nu+1}\right]^{-1}(y_{\nu+1,n}\, y_{\nu,m} - y_{\nu+1,m}\, y_{\nu,n}) +$$
$$+ \left[\binom{N+\nu}{\nu}\binom{N+1}{\nu}\right]^{-1}(y_{\nu-1,n}\cdot y_{\nu,m} - y_{\nu-1,m}\, y_{\nu,n}).$$

Summiert man letzten Endes diesen Ausdruck über ν, so entfallen rechts vom Gleichheitszeichen alle bis auf das letzte Glied und es bleibt

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{2(n-m)(2k+1)}{\binom{N+k+1}{k+1}\binom{N+1}{k+1}(k+1)^2} y_{k,n}\, y_{k,m} = \frac{1}{\binom{N+\nu+1}{\nu+1}\binom{N+1}{\nu+1}}(y_{\nu+1,n}\, y_{\nu,m} - y_{\nu+1,m}\, y_{\nu,n}),$$

$$\nu, n, m = 0, 1, 2, \ldots, N, \qquad (20)$$

eine Beziehung, die der Summendarstellung von *Christoffel*[8] entspricht.

Einige weitere Beziehungen, die für das praktische Rechnen mit den Polynomen von Bedeutung sind, können noch angegeben werden.

Aus der Orthogonalität zum ersten Polynom $y_{0n} = 1$ folgt für alle folgenden

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n} = 0, \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, N. \qquad (21)$$

Schreibt man (9′′) in anderer Form

$$y_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}\binom{n}{\nu-k}\binom{N-n}{k}(-1)^k,$$

und schreibt die Summe gliedweise an, dann sieht man unmittelbar die Gültigkeit der Symmetriebeziehung

$$y_{\nu n} = (-1)^{\nu} y_{\nu,N-n}. \qquad (22)$$

[8] Vergleiche etwa mit [8], S. 277.

Mit Hilfe des Normierungsfaktors läßt sich eine einfache Abschätzung der Polynome angeben. Es gilt nämlich

$$y_{\nu n}^2 = \binom{N+\nu+1}{N-\nu}\binom{2\nu}{\nu} \cdot r_{\nu n}^2 \leqq \binom{N+\nu+1}{N-\nu}\binom{2\nu}{\nu} \sum_{n=0}^{N} r_{\nu n}^2$$

und daher

$$| y_{\nu n} | \leqq \sqrt{\binom{N+\nu+1}{N-\nu}\binom{2\nu}{\nu}}. \tag{23}$$

Literatur

[1] Encycl. d. scienc. mathémat. I/4.

[2] *W. Gröbner*: Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni, Sem. Mat. Roma, 3 (4), 29—51, 1939.

[3] *W. Gröbner*: Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Mh. Math. 52, 38—54, 1948.

[4] *R. L. Anderson* and *T. A. Bancroft*: Statistical Theory in Research, New York, Toronto, London: Mc. Graw—Hill Book Company, Inc. 1952.

[5] *P. Lesky*: Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen, Mh. Math. 63, 59—83, 1959.

[6] *E. Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, Leipzig: Teubner, 1901.

[7] *W. D. Sellers*: Studies in Synoptic Climatology, Massachusetts Institute of Technology, Department of Meteorology, Cambridge, Massachusetts; Final Report synoptic climatology Project, 1956.

[8] *G. Vitali* e *G. Sansone*: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, Bologna: Nicola Zanichelli, 1946, parte II.

Einige Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen

Von

Franz Heigl, Weiden (Opf.)*

(Eingegangen am 23. Oktober 1958)

In meiner Arbeit „Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen" [1] sind verschiedene Schranken für die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten angegeben. In dieser Schrift wird nun das dort angegebene Abschätzungsprinzip, das sämtlichen Ergebnissen zugrundeliegt, noch etwas allgemeiner gefaßt. Wir kommen so zu weiteren Schranken, die in Beziehung zu gewissen klassischen Ergebnissen stehen, insofern, als sie dieselben als Spezialfälle enthalten.

Die algebraische Gleichung habe komplexe Koeffizienten; sie sei von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^{n-\mu} = 0, \tag{1}$$

wobei $a_0 = 1$, $a_\mu = 0$ für $\mu < 0$, $\mu > n$, $|a_\mu| = A_\mu$ sei.

Es werden nun positive Funktionen der Koeffizientenbeträge und eines positiven Parameters M eingeführt, die wir mit

$$g_\nu(A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_{\nu-l}, M) \tag{2}$$

bezeichnen, wobei die Anzahl der g_ν und die positive Zahl l von Fall zu Fall geeignet festgelegt werden. Setzen wir in (2) für die A_ϱ Zahlenwerte ein, so gibt es eine Funktion $a(M)$, so daß die Ungleichungen

$$g_\nu(A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_{\nu-l}, M) \leqq a(M) \tag{3}$$

bestehen.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung werden auch hier in der Form

$$z_\nu = -k_\nu M \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

* Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *J. Heinhold*, T. H. München, möchte ich an dieser Stelle für wertvolle Anregungen meinen ergebensten Dank aussprechen.

dargestellt. Die Beträge der symmetrischen Grundfunktionen der k_ν nennen wir S_μ. Nach *Dini* [2] ist dann jedes $|k_\nu|$ kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n - S_1 z^{n-1} - \ldots - S_n = 0.$$

Fordern wir nun

$$\sum_{\mu=1}^{n} S_\mu = 1, \tag{5}$$

so gilt $|k_\nu| \leqq 1$, und es folgen aus der nicht eindeutigen Darstellung (4) die Ungleichungen $|z_\nu| \leqq M$.

Um M zu erhalten, denken wir uns die Ungleichungen (3) der Reihe nach in den S_ν und M hingeschrieben:

$$g_\nu(M^\nu S_\nu, M^{\nu-1} S_{\nu-1}, \ldots, M^{\nu-l} S_{\nu-l}, M) \leqq a(M).$$

Addiert man diese Ungleichungen, so enthalten wir mit Forderung (5) eine Ungleichung in den Größen M und a allein. Andererseits stellt aber jede der Ungleichungen (3) eine weitere Beziehung zwischen M und a dar, so daß es möglich sein kann, a zu eliminieren. Bei geeigneten g_ν erhalten wir somit eine Ungleichung für M und damit für die $|z_\nu|$.

Auf analoge Weise kann man mit gewissen

$$g_\nu'(A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_{\nu-l}, M') \geqq a'(M)$$

eine untere Schranke gewinnen mit der Wurzeldarstellung

$$z_\nu = -k_\nu' M'. \tag{6}$$

Sind die S_μ' die Beträge der symmetrischen Grundfunktionen der k_ν', so sind alle $|k_\nu'|$ größer oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n + S_1' z^{n-1} + \ldots + S_{n-1}' z - S_n' = 0.$$

Aus der Forderung

$$1 + S_1' + \ldots + S_{n-1}' = S_n' \tag{7}$$

ergeben sich dann die Ungleichungen $|z_\nu| \geqq M'$, wobei die Definitionsungleichung für M' auf analoge Weise wie für M hergeleitet werden kann.

1.

a) Wir betrachten die Ungleichungen

$$\frac{2p_0 A_\nu + p_1 A_{\nu-1} + \ldots + p_r A_{\nu-r}}{p_0 A_{\nu-1} + p_1 A_{\nu-2} + \ldots + p_r A_{\nu-r-1}} \leqq a \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+r). \tag{8}$$

Der Parameter M kommt hier explizit nicht vor; a ist daher die größte der Zahlen (8). Die p_λ ($\lambda=1, 2, \ldots, r$) sind reelle Parameter. p_0 darf, damit das Ungleichungssystem sinnvoll ist, niemals $\leqq 0$ gewählt werden, da in diesem Falle der Nenner von (8) für $v = 1$ kleiner oder gleich 0 wäre. Die übrigen Parameter sind insoweit beliebig reell, als alle Zähler und Nenner von (8) größer als 0 ausfallen müssen. Insbesondere muß also auch $p_r > 0$ sein.

Aus (8) folgt dann mit $S_0 = 1$, $S_\mu = 0$, für $\mu < 0$ und $\mu > n$:

$$2p_0M^vS_v + p_1M^{v-1}S_{v-1} + \ldots + p_rM^{v-r}S_{v-r} \leqq a(p_0M^{v-1}S_{v-1} + \\ + p_1M^{v-2}S_{v-2} + \ldots + p_rM^{v-r-1}S_{v-r-1}),$$

oder

$$2p_0S_v + \frac{p_1}{M}S_{v-1} + \ldots + \frac{p_r}{M^r}S_{v-r} \leqq \\ \leqq a\left(\frac{p_0}{M}S_{v-1} + \frac{p_1}{M^2}S_{v-2} + \ldots + \frac{p_r}{M^{r+1}}S_{v-r-1}\right).$$

Wir denken uns nun diese Zeilen für $v = 1, 2, \ldots, n + r$ hingeschrieben. Durch Summation erhalten wir dann unter Berücksichtigung von (5) und unter der Voraussetzung $p_r > 0$:

$$2p_0 + \frac{2p_1}{M} + \ldots + \frac{2p_r}{M^r} < a\left(\frac{2p_0}{M} + \frac{2p_1}{M^2} + \ldots + \frac{2p_r}{M^{r+1}}\right). \tag{9}$$

Das Gleichheitszeichen geht deshalb verloren, weil in $\sum_{v=1}^{n+r} S_{v-r-1} = 1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}$ das Glied S_n, das $\neq 0$ vorausgesetzt werden kann, gar nicht vorkommt und die Summe daher stets < 2 ist, während alle anderen Summen über die S_λ die Zahl 2 ergeben. Für ein positives p_r besteht die Ungleichung

$$\frac{p_r}{M^{r+1}}\sum_{v=1}^{n+r} S_{v-r-1} < \frac{2p_r}{M^{r+1}}.$$

Aus (9) folgt dann $M < a$.

b) Nun wird eine untere Schranke abgeleitet, wobei wir ausgehen von den Ausdrücken

$$\frac{p_rA_v + p_{r-1}A_{v-1} + \ldots + p_1A_{v-r+1} + p_0A_{v-r}}{p_rA_{v-1} + p_{r-1}A_{v-2} + \ldots + p_1A_{v-r} + 2p_0A_{v-r-1}} \geqq a' \tag{10}$$

$$(v = 1, 2, \ldots, n + r).$$

Gelten für die p_λ dieselben Voraussetzungen wie in 1a, so bekommen wir

$$p_r M'^{v} S'_v + p_{r-1} M'^{v-1} S'_{v-1} + \ldots + p_1 M'^{v-r+1} S'_{v-r+1} + p_0 M'^{v-r} S'_{v-r} \geqq$$
$$\geqq a'(p_r M'^{v-1} S'_{v-1} + p_{r-1} M'^{v-2} S'_{v-2} + \ldots + p_1 M'^{v-r} S'_{v-r} +$$
$$+ 2\, p_0 M'^{v-r-1} S_{v-r-1}),$$

oder

$$p_r S'_v + \frac{p_{r-1}}{M'} S'_{v-1} + \ldots + \frac{p_1}{M'^{r-1}} S'_{v-r-1} + \frac{p_0}{M'^{r}} S'_{v-r} \geqq$$
$$\geqq a' \left(\frac{p_r}{M'} S'_{v-1} + \frac{p_{r-1}}{M'^2} S'_{v-2} + \ldots + \frac{p_1}{M'^{r}} S'_{v-r} + \frac{2\, p_0}{M'^{r+1}} S'_{v-r-1} \right).$$

Summieren wir diese Ungleichungen und beachten wir die Forderung (7), so ergibt sich die Ungleichung

$$p_r(2\, S'_n - 1) + \frac{2\, p_{r-1} S'_n}{M'} + \ldots + \frac{2\, p_1 S'_n}{M'^{r-1}} + \frac{2\, p_0 S'_n}{M'^{r}} \geqq$$
$$\geqq a' \left(\frac{2\, p_r S'_n}{M'} + \frac{2\, p_{r-1} S'_n}{M'^2} + \ldots + \frac{2 p_1 S'_n}{M'^{r}} + \frac{2\, p_0 S'_n}{M'^{r+1}} \right).$$

Da $p_r > 0$ vorausgesetzt ist, gilt auch die etwas schwächere Ungleichung

$$2\, p_r S'_n + \frac{2\, p_{r-1} S'_n}{M'} + \ldots + \frac{2\, p_0 S'_n}{M'^{r}} > a' \left(\frac{2\, p_r S'_n}{M'} + \ldots + \frac{2\, p_0 S'_n}{M'^{r+1}} \right)$$

oder

$$M' > a',$$

wobei a' die kleinste der Zahlen (10) ist.

Zusammengefaßt erhalten wir

Satz 1: Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_v| < \operatorname{Max} \frac{2\, p_0 A_v + p_1 A_{v-1} + \ldots + p_r A_{v-r}}{p_0 A_{v-1} + p_1 A_{v-2} + \ldots + p_r A_{v-r-1}}$$

$$|z_v| > \operatorname{Min} \frac{p_r A_v + p_{r-1} A_{v-2} + \ldots + p_1 A_{v-r+1} + p_0 A_{v-r}}{p_r A_{v-1} + p_{r-1} A_{v-2} + \ldots + p_1 A_{v-r} + 2\, p_0 A_{v-r-1}}$$
$$(v = 1, 2, \ldots, n + r),$$

wobei die p_λ Parameter sind, von denen p_0 und p_r stets > 0 gewählt werden müssen, während die übrigen Parameter nur so einzurichten sind, daß alle Zähler und Nenner > 0 werden.

Spezialfall: $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = 0$ ergibt einen bekannten Satz von *Anghelutza* [3]:

$$\text{Min } \tfrac{1}{2} \frac{A_v}{A_{v-1}} < |z_v| < \text{Max } 2 \frac{A_v}{A_{v-1}}.$$

2.

Nun werden die Ungleichungen

$$\sqrt[\alpha v+m]{A_v + \beta A_{v-1}} \leqq a \quad (v = 1, 2, \ldots, n+1;\ A_v = 0 \text{ für } v > n) \tag{11}$$

zugrundegelegt. Die Größen α, m und β sind Parameter, die den Ungleichungen $\alpha v + m > 0$, $A_v + \beta A_{v-1} \geqq 0$ für alle v genügen müssen. Damit der Radikand auch für $v = n+1$ größer oder gleich 0 bleibt, muß β stets $\geqq 0$ angenommen werden.

Aus (11) ergeben sich dann die Ungleichungen

$$A_v + \beta A_{v-1} \leqq a^{\alpha v+m},$$

oder in den S_v und M:

$$S_v + \frac{\beta}{M} S_{v-1} \leqq \frac{a^{\alpha v+m}}{M^v} = a^m \left(\frac{a^\alpha}{M}\right)^v.$$

Durch Summation der einzelnen Zeilen erhalten wir dann mit Forderung (5) unter der Voraussetzung

$$M > a^\alpha: \tag{12}$$

$$1 + \frac{2\beta}{M} < a^m \frac{a^\alpha}{M} \frac{1}{1 - a^\alpha/M} = \frac{a^{m+\alpha}}{M - a^\alpha} \text{ oder}$$

$$M^2 - M(a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta) - 2a^\alpha \beta < 0, \text{ d. h.}$$

$$M < \frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2}\right)^2 + 2a^\alpha \beta} = K.$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß für $M = K - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ die Ungleichung (12) besteht, wobei ε beliebig nahe an 0 liegen soll. Dies kann aber aus der Ungleichung $a^\alpha < K - \varepsilon$ gefolgert werden, die sich verifizieren läßt, wenn nur ε klein genug gewählt wird.

Wir erhalten somit

Satz 2: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_v| < \frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2}\right)^2 + 2a^\alpha \beta},$$

wobei die Größen α, m und β beliebig reell sind bis auf die Bedingungen $\alpha\nu + m > 0$, $\beta \geqq 0$ und

$$a = \operatorname{Max}^{\alpha\nu+m}\sqrt{A_\nu + \beta A_{\nu-1}} \quad \textit{für } \nu = 1, 2, \ldots, n+1 \textit{ ist.}$$

Interessant sind einige Spezialfälle:

a) $\alpha = 1, m = 0, \beta = 0 : |z_\nu| < 2 \operatorname{Max}\sqrt{A_\nu}$ (Fujiwara [4]).

b) $\alpha = 1, m = -1, \beta = 0 : |z_\nu| < 1 + \operatorname{Max}^{\nu-1}\sqrt{A_\nu}$, falls $A_1 < 1$ ist.

(durch Tschirnhaustransformation kann $A_1 = 0$ erreicht werden). Vergleiche damit die klassische Schranke $|z_\nu| < 1 + \operatorname{Max} A_\nu$, die für $A_\nu > 1$ immer ungünstiger ist!

c) $\alpha = 1, m \geqq 0, \beta = 0 : |z_\nu| < \operatorname{Max}^{\nu+m}\sqrt{A_\nu} + \left(\operatorname{Max}^{\nu+m}\sqrt{A_\nu}\right)^{m+1}$.

Die Auswertung zeigt, daß diese Verallgemeinerungen in vielen Fällen tatsächlich zu einer Verbesserung der bekannten klassischen Schranken führen können. Ein einfaches *Beispiel*:

$$z^5 + z^4 - 4z^3 + 2iz^2 + 1 = 0;$$

Die Parameter α, β und m werden folgendermaßen spezialisiert:

$\alpha = 2$, $\beta = 2$, $m = 2$. Dann erhalten wir für a den Wert $\sqrt[6]{6}$. Nach Satz 2 bekommen wir daher $|z_\nu| < 3,33$. Nach *Fujiwara* dagegen nur $|z_\nu| < 4$.

3.

Es wird eine sehr nützliche Abschätzungsformel von *Westerfield* [5] verallgemeinert. Sie lautet:

Ist G^* die größte der Zahlen $\sqrt[\nu]{A_\nu}$, H^* die zweitgrößte, so ist $|z_\nu| < G^* + H^*$.

Wir gehen von den Ungleichungen

$$\frac{\sqrt[\nu+m]{A_\nu} + \sqrt[\mu+m]{A_\mu}}{M} \leqq a(M)$$

($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu \neq \mu$; $\nu + m > 0$; $\mu + m > 0$) aus.

Es sei $G = \operatorname{Max}_1 \sqrt[\nu+m]{A_\nu}$, also die größte der Zahlen $\sqrt[\nu+m]{A_\nu}$, $H = \operatorname{Max}_2 \sqrt[\nu+m]{A_\nu}$, also die zweitgrößte dieser Zahlen. Dann ist

$$G + H = aM.$$

Ferner setzen wir

$$G = q\,aM,\ H = p\,aM \quad (p+q=1;\ p \leqq 1/2;\ q \geqq 1/2).$$

Ist g der Index für G, so ist

$$\sqrt[g+m]{A_g} = \sqrt[g+m]{M^g S_g} = qaM,$$
$$S_g = M^m (qa)^{g+m}.$$

Für alle von g verschiedenen Indizes gilt allgemein

$$\sqrt[v+m]{A_v} = \sqrt[v+m]{M^v S_v} \leqq paM,$$
$$S_v \leqq M^m (pa)^{v+m}.$$

Unter der Voraussetzung $qa < 1$, $pa < 1$ gilt sicher die Ungleichung

$$\sum_{v=1}^{n} S_v \leqq M^m (qa)^{m+1} [1 + pa + \ldots + (pa)^{n-1}] < M^m (qa)^{m+1} \frac{1}{1-pa}.$$

Bei der Summation bekommen wir mit (5):

$$1 - pa < M^m (qa)^{m+1},$$
$$1 < M^m (qa)^{m+1} + pa,$$
$$M < (q\,Ma)^{m+1} + p\,Ma.$$

Nun ist aber $aM = \mathrm{Max}\,(\sqrt[v+m]{A_v} + \sqrt[\mu+m]{A_\mu}) = K$. Deswegen folgt

$$M < (qK)^{m+1} + pK. \tag{13}$$

Nun müssen wir noch zeigen, inwieweit die Voraussetzungen $pa < 1$, $qa < 1$ erfüllt sind.

Setzen wir $M = (qK)^{m+1} + pK - \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ und beliebig nahe an 0 liegt, oder, da $K = aM$, $G = qaM$ ist,

$$1 = G^m\,qa + pa - \varepsilon,$$

so erkennen wir, daß pa und im Falle $G \geqq 1$ auch qa immer kleiner als 1 sein müssen, denn ε ist beliebig klein.

Wir gelangen somit zu

Satz 3: *Ist* $G = \mathrm{Max}_1\,\sqrt[\mu+m]{A_\mu}$, $H = \mathrm{Max}_2\,\sqrt[v+m]{A_v}$, $(\mu \neq v)$ m *ein Parameter, so daß* $v + m > 0$ *und* $\mu + m > 0$ *ist, so gilt im Falle* $G > 1$ *für alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten die Abschätzung*

$$|z_\nu| < G^{m+1} + H.$$

Spezialfall: Für $m = 0$ erhalten wir einen Satz von Westerfield. Die Voraussetzung $G > 1$ fällt dann weg.

Beispiel: $z^5 + 8z^4 + 16^3 + 5iz^2 + 0,2z + 6i = 0$.

$$m = 0: G^* = 8,\ H^* = \sqrt{16},\ |z_\nu| < 12;$$
$$m = 2: G = \sqrt[3]{8},\ H = \sqrt[4]{16},\ |z_\nu| < 10.$$

4.

In diesem Abschnitt sollen die Ungleichungen

$$A_\nu + M A_{\nu-1} \leqq a(M) \qquad (\nu = 2, 4, 6, \ldots) \tag{14}$$

diskutiert werden. In den S_ν und M lauten sie:

$$M^\nu S_\nu + M^\nu S_{\nu-1} \leqq a, \text{ bzw.}$$

$$S_\nu + S_{\nu-1} = \frac{a}{M^\nu}.$$

Für die Summe der S_ν gilt folgende Ungleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu = \frac{a}{M^2} + \frac{a}{M^4} + \frac{a}{M^6} + \cdots < \frac{a}{M^2}\,\frac{1}{1 - 1/M^2} = \frac{a}{M^2 - 1},$$

falls $M > 1$ ist.

Mit $\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu = 1$ erhalten wir dann

$$M^2 < 1 + a; \tag{15}$$

andererseits ist nach (14)

$$a \geqq A_\nu + M A_{\nu-1}.$$

Richten wir nun a so ein, daß die Ungleichungen

$$a \geqq A_\nu + \sqrt{1 + a}\, A_{\nu-1} \tag{16}$$

für die unter (14) angegebenen ν, oder anders ausgedrückt, die Ungleichungen

$$a^2 - (2 A_\nu + A_{\nu-1}^2)\, a + A_\nu^2 - A_{\nu-1}^2 \geqq 0$$

Bestand haben, so gelten wegen (15) erst recht die Ungleichungen (14). Das günstigste a, das dies leistet, ist offenbar die größte positive Wurzel der Gleichungen

$$x^2 - (2 A_\nu + A_{\nu-1}^2)\, x + A_\nu^2 - A_{\nu-1}^2 = 0 \qquad (\nu = 2, 4, 6, \ldots).$$

Diese lautet

$$a = \operatorname{Max}\left(A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{2} + A_{\nu-1}\sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}\right).$$

Damit haben wir nach (15):

$$|z_\nu| < \operatorname{Max} \sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{2} + A_{\nu-1}\sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}} =$$

$$= \operatorname{Max}\left(\frac{A_{\nu-1}}{2} + \sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}\right)$$

und somit

Satz 4: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| < \operatorname{Max}\left(\frac{A_{\nu-1}}{2} + \sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}\right). \qquad (\nu = 2, 4, 6, \ldots).$$

Es läßt sich nun zeigen, daß die Abschätzung nach Satz 4 stets besser oder ungünstigstenfalls immer noch so gut ist wie die bekannte klassische Schranke $|z_\nu| < 1 + \operatorname{Max} A_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), die für relativ kleine Koeffizientenbeträge gedacht ist und die von *Königsberger* [6] etwas verschärft worden ist.

Ist $A_m = \operatorname{Max} A_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), so ist diese Behauptung bewiesen, wenn wir folgende zwei Ungleichungen verifizieren können:

a) $$\frac{A_{m-1}}{2} + \sqrt{1 + A_m + \frac{A_{m-1}^2}{4}} \leqq 1 + A_m,$$

b) $$\frac{A_m}{2} + \sqrt{1 + A_{m+1} + \frac{A_m^2}{4}} \leqq 1 + A_m;$$

a) ist aber identisch mit

$$A_{m-1} + A_m A_{m-1} \leqq A_m^2 + A_m,$$

b) identisch mit

$$A_{m+1} \leqq A_m.$$

Dies sind Ungleichungen, die tatsächlich bestehen können. Wir erkennen ferner, daß die Schranke $1 + \operatorname{Max} A_\nu$ und die nach Satz 4 erhaltene Schranke sicher dann gleich sind, wenn der absolut größte Koeffizient mindestens dreimal nebeneinander vorkommt. Tritt A_m nur zweimal nebeneinander auf, so sind die Schranken nur dann gleich, wenn die betreffende Kombination bei den zu untersuchenden Ausdrücken vertreten ist.

5.

Zum Schluß wird noch ein sehr einfacher Beweis einer Ungleichung von *Montel* [7] angegeben. Der Originalbeweis ist verhältnismäßig lang; mit dem eingeführten Abschätzungsprinzip läßt er sich erheblich verkürzen. Benutzt wird daneben lediglich eine Ungleichung, die auch

von *Montel* verwendet worden ist und die folgendermaßen lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^m\right)^{1/m} \left(\sum_{i=1}^{n} B_i^{m'}\right)^{1/m'} \quad (A_i, B_i > 0;\ 1/m + 1/m' = 1). \tag{17}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[m]{A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m}}{M} = a(M). \tag{18}$$

Daraus folgt $A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m = (aM)^m$ und hieraus

$$(M^v S_v)^m = e_v (aM)^m \text{ mit } \sum_{v=1}^{n} e_v = 1,$$

$$M^v S_v = aM \sqrt[m]{e_v},$$

$$S_v = \frac{aM \sqrt[m]{e_v}}{M^v}.$$

Zur Abschätzung von $\sum_{v=1}^{n} S_v$ wenden wir die Ungleichung (17) auf unseren Fall an. Setzen wir nach (5) $\sum_{v=1}^{v} S_v = 1$, so bekommen wir

$$1 < \frac{aM}{\sqrt[m']{M^{m'} - 1}} \text{ oder } aM > \sqrt[m']{M^{m'} - 1}.$$

Bei Verwendung von (18) erhalten wir schließlich

$$\sqrt[m]{A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m} > \sqrt[m']{M^{m'} - 1}$$

bzw. wegen der Bedingungen bei (17)

$$M < \{1 + (A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m)^{1/(m-1)}\}^{(m-1)/m}.$$

Da $|z_v| \leqq M < \{1 + A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m)^{1/(m-1)}\}^{(m-1)/m}$ ist, ist damit der Satz von *Montel* bewiesen.

Literatur

[1] *Heigl F.*, Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen, Mh. Math. **62** (1958), S. 16—56.

[2] *Dini U.*, Un teorema sui limiti superiori et inferiori dei moduli delle radici di una equazione algebrica, Ann. Mat. pura appl. Milano (3) **1** (1898), S. 77—81.

[3] *Anghelutza T.*, Una estensione di un teorema di Hurwitz, Boll. Un. Mat. Ital. **12** (1933), S. 284—288.

[4] *Fujiwara M.*, Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, Tôhoku Math. J. **10** (1916), S. 167.

[5] *Westerfield E. C.*, A new bound for the zeros of polynomials, Amer. Math. Mon. **40** (1933), S. 18—23.

[6] *Königsberger L.*, Über die Abgrenzung der Lösungen einer algebraischen Gleichung, Rend. Circ. mat. Palermo **26** (1908), S. 346—359.

[7] *Montel P.*, Sur quelques limites pour les modules des zeros des polynômes, Comment. math. helvet. **7** (1935), S. 178—200.

Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften

Von

Herbert Izbicki, Wien

(Eingegangen am 28. Oktober 1958)

In meiner Arbeit „Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen" [4] habe ich den folgenden Satz (dort 1. 3) bewiesen:

Satz 1. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ *und drei natürliche Zahlen* n, χ, c *vorgegeben sind, so daß* $3 \leqq n \leqq 5$, $2 \leqq \chi \leqq n$, $1 \leqq c \leqq n$ *und daß nicht gleichzeitig* $\chi = 2$ *und* $c = 1$ *ist, dann gibt es unendlich viele nichtisomorphe Graphen* X, *die regulär vom Grade* n *sind, deren Farbenzahl* $\chi(X) = \chi$, *deren Zusammenhang* $c(X) = c$ *und deren Automorphismengruppe* $G(X) \cong \mathfrak{H}$ *ist. Sie haben keine Fixpunkte und keine Fixkanten, falls* $\mathfrak{H}$ *mindestens zwei Elemente hat.*

Es wurde dann nicht extra darauf hingewiesen, daß alle in der Arbeit konstruierten Graphen zusammenhängend und endlich sind. In der vorliegenden Abhandlung soll dieses Resultat auf zusammenhängende, unendliche Graphen endlichen Grades erweitert werden. Das Ergebnis ist in Satz 4 zusammengefaßt. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß Satz 1.2 [4] für unendliche Graphen nicht mehr gilt. Es gibt sehr wohl reguläre unendliche Graphen endlichen Grades mit dem Zusammenhang 1 und der Farbenzahl 2. Wir beweisen im folgenden den

Satz 2. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ *und eine natürliche Zahl* n *mit* $3 \leqq n \leqq 5$ *vorgegeben ist, dann gibt es eine nicht abzählbare Menge von unendlichen regulären Graphen* X *vom Grade* n *mit* $\chi(X) = 2$, $c(X) = 1$, $G(X) \cong \mathfrak{H}$. *Sie haben keine Fixpunkte und keine Fixkanten, falls* $\mathfrak{H}$ *mindestens zwei Elemente hat.*

Beweis. Wir führen die Graphen C_1, C_2, C_3, C_4 und aus [4] die Graphen B_{16} ubd B_{17} ein.

$$C_1 = \bigcup_{i=1}^{11} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=2}^{6} [i, i+5]$$

$$C_2 = \bigcup_{i=1}^{13} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=1}^{5} [2i, 2i+3] \cup [3, 12]$$

$$C_3 = \bigcup_{i=2}^{19} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=3}^{16} [i, i+3] \cup [1, 3] \cup [19, 21] \cup [4, 17] \cup [5, 18]$$

$$C_4 = \bigcup_{i=2}^{27} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=3}^{24} [i, i+3] \cup [1, 3] \cup [27, 29] \cup [4, 25] \cup [5, 26]$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß sie die folgenden Eigenschaften haben:

(i) Von den Endpunkten abgesehen, sind es reguläre Graphen; und zwar sind C_1, C_2 vom Grade 3, C_3, C_4 vom Grade 4 und B_{16}, B_{17} vom Grade 5.

(ii) $\chi(C_1) = \chi(C_2) = \chi(C_3) = \chi(C_4) = \chi(B_{16}) = \chi(B_{17}) = 2$.

(iii) $G(C_1) \cong G(C_2) \cong G(B_{16}) \cong G(B_{17}) \cong \mathfrak{Z}_2$, $G(C_3) \cong G(C_4) \cong \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_2$.

(iv) Die Graphen C_1 und C_2 lassen sich in offensichtlicher Weise zu einseitig-unendlichen Ketten zusammenfügen, die von einem einzigen Endpunkte abgesehen, reguläre Graphen 3. Grades sind. Ebenso lassen sich C_3 und C_4 zu einseitig-unendlichen Ketten fügen, die, von einem Paar von Endpunkten abgesehen (Entfernung = 2), regulär vom 4. Grade sind. Auf gleiche Weise hängt man auch B_{16} und B_{17} zu einseitig-unendlichen Ketten zusammen, die, wieder von einem einzigen Endpunkt abgesehen, regulär 5. Grades sind.

(v) Die Automorphismengruppe aller in (iv) konstruierten Graphen ist trivial ($\cong \mathfrak{E}$).

(vi) Die Menge aller aus C_1 und C_2 gebildeten Ketten ist der Gesamtheit aller unendlichen Folgen aus den Zahlen 0 und 1 gleichmächtig und daher nicht abzählbar. Dasselbe gilt für die Menge der Ketten aus C_3 und C_4 und die der Ketten aus B_{16} und B_{17}.

(I) Sei nun eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ vorgegeben. Dann gibt es — bereits nach [3] — einen regulären Graphen X 3. Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ hat X weder Fixpunkte noch Fixkanten. Wird nun in jede Kante von X ein Punkt — zunächst vom Grade 2 — eingeschoben und werden dann alle diese neuen Punkte kongruente Ketten aus C_1 und C_2 angehängt, so ist der neue Graph Y wieder regulär vom 3. Grade und

es ist sofort zu sehen, daß $G(Y) \cong \mathfrak{H}$ ist. Um einzusehen, daß $\chi(Y) = 2$ ist, braucht man nur alle auf X selbst zurückgehenden Punkte mit Farbe 1, alle in die Kanten eingeschobenen Punkte mit Farbe 2 zu belegen. Die weitere Farbenbelegung ist dann ohne weiteres möglich, da $\chi(C_1) = \chi(C_2) = 2$ ist. Trivialerweise ist $c(Y) = 1$. War $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$, also X ohne Fixpunkte und Fixkanten, so übertragen sich diese Eigenschaften auch auf Y.

(II) Wir gehen wieder von einer endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ aus. Es gibt dann nach [4] sicher einen regulären Graphen X 4. Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Werden alle Kanten von X durch kongruente Ketten aus C_3 und C_4 ersetzt, so erhält man einen neuen Graphen Y, er ist regulär 4. Grades, $G(Y) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(Y) = 2$, $c(Y) = 1$. Für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ ist Y ohne Fixpunkte und ohne Fixkanten.

(III) Ein drittes Mal gehen wir von einer endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ aus. Wie im vorigen Falle, brauchen wir einen regulären Graphen X 4. Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Dann hängen wir an alle Knotenpunkte von X kongruente Ketten aus B_{16} und B_{17}. Der neue Graph Y hat $G(Y) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(Y) = 2$, $c(Y) = 1$ und er ist regulär 5. Grades. Für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ bleibt die Fixpunkte- und Fixkantenfreiheit erhalten.

Fassen wir I, II und III zusammen, so ist Satz 2 bewiesen.

Beim Beweis des Satzes 1 [4, Satz 1.3] wird zunächst ein Graph mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $n = 3$, $\chi = 2$, $c = 3$ konstruiert. Die Graphen mit anderen Zahlen für n, χ, c werden dann aus diesem gewonnen. Will man einen analogen Satz für unendliche Graphen herleiten, so genügt es also, unendliche Graphen mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $n = 3$, $\chi = 2$, $c = 3$ zu finden; das weitere geht dann genau wie in [4]. Wir beweisen daher als nächstes

Satz 3. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ vorgegeben ist, dann gibt es eine nicht abzählbare Menge von unendlichen regulären Graphen X vom Grade 3 mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X) = 2$, $c(X) = 3$.

Beweis. Wir führen zu jeder unendlichen Folge aus den Zahlen 1 und 2 einen Graphen $D(i_0, i_1, i_2, \ldots)$ durch Angabe seiner Knotenpunktmenge V und seiner Kantenmenge E^* ein.

$$D(i_0, i_1, i_2, \ldots) = (V, E^*) \qquad i_k = 1 \text{ oder } 2$$

$$V = \bigcup_{j=2}^{6i_0+1} I_j^0 \cup I_{6i_0+4}^0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{P^{k-1} \cup Q^{k-1} \cup \bigcup_{j=1}^{6i_k+1} I_j^k \cup I_{6i_k+4}^k\}$$

$$E^* = [P^0, I_2^0] \cup [Q^0, I_4^0] \cup \bigcup_{j=2}^{6i_0} [I_j^0, I_{j+1}^0] \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{[P^k, I_1^k] \cup [Q^k, I_{6i_{k-1}+4}^{k-1}] \cup$$

$$\cup\, [I_1^k, I_{6i_{k-1}+1}^{k-1}] \cup [I_{6i_{k-1}+4}^{k-1}, I_4^k] \cup \bigcup_{j=1}^{6i_k} [I_j^k, I_{j+1}^k]\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{i_k} \{[I_{6j-4}^k, I_{6j+1}^k] \cup [I_{6j-3}^k, I_{6j}^k] \cup [I_{6j-1}^k, I_{6j+4}^k]\}.$$

Dann nehmen wir einen regulären Graphen X dritten Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{H}$ eine vorgegebene endliche Gruppe ist, und bauen $D(i_0, i_1, i_2, \ldots)$ auf die gleiche Weise ein, wie B_1 beim Beweis zu Satz 3.1 in [4]. Natürlich brauchen wir eine abzählbare Menge kongruenter Kopien von X. Diese Konstruktion erfüllt alle Anforderungen unseres Satzes 3.

Im Lichte der vor Satz 3 gemachten Bemerkungen folgern wir daraus

Satz 4. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ und drei natürliche Zahlen n, χ, c vorgegeben sind, so daß $3 \leqq n \leqq 5$, $2 \leqq \chi \leqq n$, $1 \leqq c \leqq n$, dann gibt es eine nicht abzählbare Menge von unendlichen, regulären Graphen X n-ten Grades, mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X) = \chi$, $c(X) = c$. Sie haben weder Fixpunkte noch Fixkanten, falls $\mathfrak{H} \not\cong \mathfrak{E}$.

Daß diesmal auch $\chi = 2$, $c = 1$ nicht ausgeschlossen zu werden braucht, beruht auf Satz 2.

Literatur

[1] *G. A. Dirac*, "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", J. Lond. Math. Soc. **27** 85—92 (1952).

[2] *R. Frucht*, „Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe", Compos. Math. **6**, 239—250 (1938).

[3] *R. Frucht*, "Graphs of degree 3 with given abstract group", Canad. J. Math. **1** 365—378, (1949).

[4] *H. Izbicki*, „Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen", Mh. Math. **61**, 42—50 (1957).

[5] *D. König*, „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", Leipzig 1936.

[6] *G. Sabidussi*, "Graphs with given group and given graph-theoretical properties", Canad. J. Math. **9** 515—525, (1957). (In [4] wurde diese Arbeit unter dem ursprünglich vorgesehenen Titel "Graph properties independent of the automorphism group" zitiert).

[7] *H. Whitney*, "Congruent graphs and the connectivity of graphs", Amer. J. Math. **54**, 150—168 (1932).

Buchbesprechungen

Opere Scelte. Vol. II. Von *G. Fubini*. (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) 350 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 3500.—.

Dieser Band enthält 29 Arbeiten aus den Jahren 1903 bis 1910. Darin sind Abhandlungen über automorphe Funktionen, über das Dirichletsche Problem, über Probleme aus der Variationsrechnung, über Differential- und Integralgleichungen, über diskontinuierliche und kontinuierliche Gruppen und ihre Anwendungen auf Differentialgeometrie. *N. Hofreiter*, Wien

Opere Scelte. Vol. II: Logica Matematica — Interlingua ed Algebra della Grammatica. Von *G. Peano*. (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) VI, 518 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 5000.—.

Dieser Band enthält 21 Arbeiten zur mathematischen Logik, 4 Besprechungen von Büchern über mathematische Logik und 5 Arbeiten über eine internationale Hilfssprache. Die letzteren Arbeiten sind besonders für Philologen von Interesse. Die Arbeiten zur mathematischen Logik sind meist vor mehr als 50 Jahren erschienen, aber auch heute noch für Mathematiker und Logiker von Bedeutung und Interesse. *N. Hofreiter*, Wien

The Structure of Arithmetic and Algebra. Von *M. H. Maria*. XIV, 294 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958. $ 5,90.

Der Hauptgegenstand dieses Buches ist die Entwicklung eines Axiomensystemes für die reellen Zahlen. Begonnen wird mit den Körperaxiomen, dann folgen die Anordnungsaxiome, die Induktionsaxiome und schließlich als Stetigkeitsaxiom das Axiom der Existenz einer oberen Grenze. Dieses inhaltliche Gerippe wird von der Verfasserin auf geschickte Weise dazu benützt, dem Leser einerseits einen Einblick in die Methoden der modernen Mathematik zu geben und ihn andererseits mit den Begriffen und Sätzen der elementaren Arithmetik und Algebra vertraut zu machen; es werden daher auch die Anfangsgründe der Zahlentheorie, die quadratischen Gleichungen und die b-adische Schreibweise der ganzen Zahlen bei beliebiger Basis b behandelt.

Das klar und sorgfältig geschriebene Buch kann schon von Schülern der Oberstufe unserer Mittelschulen mit Erfolg gelesen werden. *W. Nöbauer*, Wien

Linear Operators. Part I: General Theory. Von *N. Dunford* und *J. T. Schwartz* unter Mitwirkung von *W. G. Bade* und *R. G. Bartle*. (Pure and Applied Mathematics: Volume VII.) XIV, 858 S. New York-London: Interscience Publishers. 1958. $ 23.—.

Das großangelegte Werk, an dem die Verfasser acht Jahre lang arbeiteten, soll die gesamte Theorie der linearen Operatoren und die Anwendungen dieser Theorie behandeln, also ein Gebiet der Mathematik, dessen Ausdehnung heute schon außerordentlich groß ist. Das Werk wird deshalb in zwei Bänden erscheinen;

der vorliegende erste — bestehend aus 730 Seiten Text und einem Literaturverzeichnis von fast 100 Seiten — enthält die topologische Theorie der Räume und Operatoren und die Spektraltheorie beliebiger Operatoren, während im zweiten die Theorie der vollreduziblen Operatoren dargestellt werden soll.

Das erste Kapitel gibt einen knappen, aber vollständigen Abriß der grundlegenden Begriffe und Sätze aus Mengenlehre, Topologie und Algebra, welche später benötigt werden. Im zweiten werden fundamentale Sätze über lineare Räume abgeleitet. Das dritte Kapitel enthält eine ziemlich ausführliche Darstellung der Maß- und Integrationstheorie. Im nächsten Kapitel werden zahlreiche spezielle Fälle von linearen Räumen untersucht, welche in den Anwendungen der allgemeinen Theorie auftreten; die Eigenschaften dieser Räume werden schließlich in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt. Kapitel V beschäftigt sich mit dem Begriff der konvexen Menge in einem linearen Raum und den damit zusammenhängenden Topologien, während in Kapitel VI lineare Operatoren auf Banach-Räumen und Darstellungen solcher Operatoren studiert werden. Das nächste Kapitel behandelt die allgemeine Spektraltheorie der linearen Operatoren. Der Band schließt mit einem Kapitel, welches Anwendungen der bisher entwickelten allgemeinen Theorie enthält, vor allem auf die Ergodentheorie.

Besondere Vorkenntnisse werden vom Leser nicht verlangt; da das Buch aber in dem heute in den westlichen Ländern üblichen, etwas knappen Stil geschrieben ist, ist zu seinem Verständnis natürlich ein gewisses Maß an mathematischer Reife erforderlich. In jedem Abschnitt finden sich zahlreiche interessante Übungsaufgaben und ein mit großer Sorgfalt zusammengestellter Überblick über die gesamte bisher erschienene Literatur zu dem in diesem Abschnitt behandelten Stoffgebiet. Weitere Vorzüge des Buches sind ein ausführliches Sachverzeichnis und ein genauer „Fahrplan", der dem nur an einem bestimmten Teil des Werkes interessierten Leser zeigt, was er von den vorhergehenden Kapiteln wissen muß. Dadurch ist das Buch trotz seines großen Umfanges durchaus auch als Lehrbuch für Teilgebiete der Theorie der linearen Operatoren verwendbar, vor allem aber wird es sich als Nachschlagwerk für den Forscher bewähren.

Hoffentlich wird auch der zweite Band dieses imponierenden Werkes bald erscheinen! *W. Nöbauer*, Wien

Lehrbuch der höheren Mathematik. Teil IV. Von *W. I. Smirnow.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 5.) Mit 20 Textabb., XII, 708 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 40.—.

Stets wird von konkreten Problemen ausgegangen, die den Gegenstand beleuchten. Dann folgt die Theorie in ausführlicher und leicht verständlicher Darstellung. Am Ende jedes Abschnittes werden mehrere Beispiele gebracht. Wenn auch vieles, was hier geboten wird, bereits in Lehrbüchern steht, so werden doch auch einige neuere Arbeiten sowjetrussischer Mathematiker berücksichtigt. Es mag genügen, den Inhalt kurz anzugeben.

I. Integralgleichungen (Fredholmsche und Volterrasche Integralgleichungen, Integralgleichungen mit stetigem Kern, mit nicht beschränktem Kern, mit symmetrischem Kern, mit Cauchyschem Kern, d. h. singuläre Integralgleichungen.) Zugrundegelegt wird der Riemannsche Integralbegriff; der Lebesguesche Integralbegriff wird erst im Band V verwendet.

II. Variationsrechnung (Eulersche Gleichung, Variationsprobleme mit Nebenbedingungen, Transversalitätsbedingung, zweite Variation, das Hamiltonsche Prinzip).

III. Partielle Differentialgleichungen. Es werden die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen entwickelt. (Charakteristikentheorie für Differentialgleichungen 1. O., die Typen der Differentialgleichungen 2. O., Charakteristiken, Integrationsmethoden, Systeme von partiellen Differentialgleichungen.)

IV. Randwertprobleme. Es wird die Theorie der Randwertprobleme bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen systematisch entwickelt. (Die Greensche Funktion, Potentialtheorie, Probleme von *Dirichlet* und *Neumann*, Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung.)

N. Hofreiter, Wien

Polynomial Expansions of Analytic Functions. Von *R. P. Boas jr.* und *R. C. Buck*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 19; Reihe: Moderne Funktionentheorie). Mit 16 Textabb., VIII, 77 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Steif geheftet DM 19,80.

Hier wird der Versuch unternommen, eine einheitliche Theorie für die Entwicklungen analytischer Funktionen in Reihen von Polynomen zu geben. Das einheitliche Hilfsmittel ist dabei hauptsächlich die Methode der Kernentwicklung.

Nachdem in einem Einleitungskapitel die allgemeinen Methoden zur Entwicklung einer analytischen Funktion in eine Polynomreihe besprochen werden, folgen — abgeleitet aus dem Begriff „Verallgemeinerte Apellsche Polynome" — Entwicklungen ganzer Funktionen nach Reihen von (etwa zwanzig) speziellen Polynomklassen. In einem weiteren Kapitel werden Entwicklungen von Funktionen betrachtet, die nur in einer Umgebung des Ursprungs analytisch zu sein brauchen. Außer Konvergenzfragen werden gelegentlich auch Fragen der Summabilität von Polynomreihen diskutiert und Anwendungen zum Beweis verschiedener funktionentheoretischer Sätze angegeben. — Dieses Ergebnis-Heft bietet eine schöne Übersicht über zahlreiche in der Literatur verstreute Resultate und sei jedem an Funktionentheorie Interessierten bestens empfohlen.

K. Prachar, Wien

Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven. Von *W. Hauser* und *W. Burau*. Mit 18 Textabb. und 12 farbigen Tafeln, 103 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. DM 9,20.

Das vorliegende Buch ist eine Einführung in die algebraische Geometrie ebener Kurven unter Verwendung der klassischen Methoden und Gesichtspunkte. Das Hauptziel ist, die engen Verbindungen zwischen algebraischer Geometrie und Analysis aufzuzeigen an Hand der Theorie algebraischer Kurven. Zum Verständnis des Buches genügen die Grundkenntnisse der höheren Mathematik. Bei einer Reihe von Sätzen allgemeiner Natur wurde auf Beweisführung verzichtet, beziehungsweise die betreffenden Sachverhalte an sorgfältig ausgewählten Beispielen erläutert. Dieses Buch wird sicher dazu beitragen, die Studenten der Mathematik wieder zu anschaulicher Behandlung geometrischer Probleme zu bringen; diesem Ziel dienen auch die beigefügten 12 Farbtafeln sowie etwa 20 Textabbildungen. Viele instruktive Beispiele sind in den Text eingestreut.

Ein kurzer Inhaltsüberblick: Gerade und Kegelschnitte, Kubiken und Quartiken, Polarentheorie, Plückerformeln, Linearsysteme; Anwendung der Theorie algebraischer Kurven auf die rational auswertbaren Integrale.

H. Brauner, Wien

Introduction to the Problem of Minimal Models in the Theory of Algebraic Surfaces. Von *O. Zariski*. (Publications of the Mathematical Society of Japan: No. 4.) VII, 89 S. Tokyo: The Mathematical Society of Japan. 1958. $ 2.—.

Der allgemein als richtig angenommene Satz, daß jede irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit ein singularitätenfreies Modell besitzt, wurde für die Dimensionen 2 und 3, und zwar für 3 zum ersten Mal von *Zariski* bewiesen. In der vorliegenden Monographie behandelt er mit denselben Methoden ein verwandtes Problem, nämlich wie man innerhalb einer Klasse B von birational äquivalenten, singularitätenfreien Flächen über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper von beliebiger Charakteristik ein möglichst einfaches, ein „minimales" Modell aussuchen könne. Es sind schon sehr langwierige Vorbereitungen notwendig, um nur einen passenden Begriff „minimales Modell" exakt definieren zu können. Das geschieht dadurch, daß in der Klasse B eine teilweise Ordnung eingeführt wird durch die Ordnungsrelation $<$, indem zwei Flächen F und F' der Klasse B als in der Beziehung $F < F'$ stehend definiert werden, wenn die birationale Transformation T, die F in F' überführt *antiregulär*, d. h. T^{-1} regulär auf F' ist. F ist ein minimales Modell, wenn F zu jeder Fläche F' aus B in der Beziehung $F < F'$ steht. Zwei biregulär äquivalente Flächen werden dabei als nicht verschieden angesehen. Entscheidend ist, daß für diese Ordnungsrelation die Endlichkeitsbedingung in absteigender Richtung erfüllt ist. Das läuft auf die Elimination der exzeptionellen Kurven 1. Art hinaus. Der Hauptsatz ist dann: Wenn kein minimales Modell existiert, dann handelt es sich um eine rationale Fläche oder eine Regelfläche. Der letzte Fall wird noch weiter untersucht und führt schließlich zu der Verallgemeinerung des bekannten Satzes von *Castelnuovo*: Ist Σ ein Körper vom Transzendenzgrad 2 zwischen k und $k(x, y)$ und ist $k(x, y)$ separabel über Σ, so ist auch Σ eine rein transzendente Erweiterung des (algebraisch abgeschlossenen) Grundkörpers k. Die Beweise dieser Sätze sind in der vorliegenden Schrift (Part III) nur skizziert, weil sie in einer gesonderten Veröffentlichung im American Journal of Mathematics Platz finden sollen. Dagegen sind Teil I: Rationale Transformationen von algebraischen Mannigfaltigkeiten (beliebiger Dimensionen), und Teil II: Theorie der exzeptionellen Kurven auf einer algebraischen Fläche, in allen Einzelheiten erschöpfend dargestellt und enthalten sehr viele interessante Definitionen und Sätze. Das entscheidende Hilfsmittel sind die monoidalen Transformationen, Dilatationen nach *Severi-Segre*, die auch von *Derwidué* und vom Ref. zur Auflösung der Singularitäten algebraischer Mannigfaltigkeiten benutzt wurden.

W. Gröbner, Innsbruck

Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica. Von *F. Severi*. IV, 463 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 4500.—.

Dieses schon lange angekündigte und in Fachkreisen mit großem Interesse erwartete Werk ist nun erschienen und als Fortsetzungsband zu dem im gleichen Verlag 1942 erschienenen Buch: „Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche" zu betrachten. Der Standpunkt hat sich in den zwischen den beiden Publikationen verflossenen 16 Jahren ein wenig verschoben, ohne grundsätzlich geändert zu sein; statt von „Äquivalenzscharen" wird von „algebraischen Systemen" von Kurven auf einer Fläche, oder allgemeiner von k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten auf einer vorliegenden algebraischen Mannigfaltigkeit V_d der Dimension d gesprochen. Auf den fundamentalen Begriff des irreduziblen algebraischen Systems wird der Begriff der *algebraischen Äquivalenz* zurückgeführt, welcher im Angelpunkt aller von *Severi*

geschaffenen Theorien liegt. Denn die von *Clebsch* und *Noether* begründete, von *Cremona*, *Castelnuovo* und *Enriques* erfolgreich weitergeführte geometrische Theorie der algebraischen Kurven und Flächen war auf dem Begriff der *linearen Äquivalenz* und der *linearen* Scharen aufgebaut; mit diesem Begriff konnte man wenigstens bei den Kurven alle Probleme zufriedenstellend bewältigen. Aber schon bei den algebraischen Flächen zeigte es sich, daß man mit diesem Begriff nur mehr eine erste, oberflächliche Untersuchung durchführen konnte; die tieferliegenden Gegenstände und die überraschenden neuen Differenzierungen, die sich hier schon bei der ersten Erhöhung der Dimensionszahl einstellten, konnten mit dem verhältnismäßig groben Begriff der linearen Äquivalenz nicht mehr erfaßt werden. Die erste entscheidende Erkenntnis war die Auffindung der irregulären Flächen; gegenüber den regulären Flächen sind diese dadurch charakterisiert, daß sie kontinuierliche komplette Kurvensysteme enthalten, die nicht linear sind. (Das einfachste Beispiel bilden die Erzeugenden eines Kegels über einer elliptischen Leitkurve.)

Große Schwierigkeiten bereitete lange Zeit die einwandfreie Formulierung des neuen Äquivalenzbegriffes, für den die erste richtungweisende Arbeit von *Severi* im Jahre 1904 veröffentlicht wurde; zu dem kam der Begriff der *rationalen Äquivalenz*, der keineswegs einfacher ist, dazu. Alle diese Begriffe müssen, als Äquivalenzrelationen, die Eigenschaft haben, *transitiv* zu sein, denn nur so können sie eine Klasseneinteilung der durch sie erfaßten Gegenstände bewirken. Ferner erschien es zweckmäßig, den Gegenstandbereich durch Einführung der *virtuellen* Mannigfaltigkeiten zu erweitern. Sollten diese Begriffskonstruktionen brauchbar und wertvoll sein, so mußte man mit ihrer Hilfe gewisse fundamentale Sätze (II. Kapitel) beweisen können, der folgenden Art: Eine gegebene Kurve auf einer Fläche bestimmt eindeutig eine *Äquivalenzklasse* aller ihrer algebraisch (bzw. rational) äquivalenten Kurven, und analoge Sätze bei höheren Dimensionen. Derartige Existenz- und Eindeutigkeitssätze glaubte man zunächst auf einfache Weise und in großer Allgemeinheit gewonnen zu haben, erst nach vielen Jahren zeigte eine genauere Kritik, daß die Beweise Lücken enthielten, die nicht leicht oder überhaupt nicht auszufüllen waren. Tatsächlich ging es nur so, daß man die Voraussetzungen gegenüber der früheren Allgemeinheit einschränkte. Die von den gegenwärtig gültigen Äquivalenzbegriffen bewirkten Klasseneinteilungen sind also nicht durchaus von der erwünschten absoluten Schärfe, vielmehr können in manchen Fällen zwei verschiedene Klassen ein und dasselbe Grenzelement enthalten. Im übrigen müssen diese Klasseneinteilungen auch birational invariant sein, so daß die Klassen durch birationale Invarianten charakterisiert werden können.

Die Verhältnisse werden noch komplizierter, wenn einem System gewisse Basispunkte oder Basismannigfaltigkeiten vorgeschrieben werden; man ist dann gezwungen, zwischen „virtuellen", „effektiven", „virtuell nicht existierenden" Basispunkten u. a. zu unterscheiden. Im III. Kapitel wendet *Severi* die fundamentalen Sätze auf die Probleme der Vollständigkeit des adjungierten Systems, der mit einer Fläche verbundenen Picardschen Mannigfaltigkeit und auf die Äquivalenzschar $|S|$ an.

Nach einer kurzen Einführung in die Topologie der algebraischen Flächen bzw. ihrer Riemannschen Varietäten (riemanniana), folgt im V. Kapitel die Theorie der *Basis*, die besonders für die Probleme der abzählenden Geometrie bedeutungsvoll ist. Das letzte Kapitel beginnt mit der Theorie der einfachen Integrale (Integrale 1. Stufe) auf algebraischen Flächen, eine Theorie, die im nächsten Fortsetzungsband weitergeführt werden soll.

Wenn auch der größte Teil des vorliegenden Buches sich auf Flächen bezieht und nur in einzelnen Fällen mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten ausdrücklich in die Betrachtung einbezogen werden, so ist es doch außerordentlich reich an wichtigen Erkenntnissen und Ansätzen, die auf beliebige Dimensionen verallgemeinert werden können; dieses Werk wird sicher noch lange Zeit richtunggebend für die zukünftige Forschung bleiben. Tatsächlich sind von den vielen fruchtbaren Ideen und Begriffskonstruktionen *Severis* bis jetzt nur wenige in den tonangebenden modernen Richtungen der algebraischen Geometrie verwertet worden. Man hat fast den Eindruck, daß diese bei der Übernahme des Severischen Begriffes der Schnittmultiplizität stecken geblieben seien oder durch dessen Kompliziertheit vor weiteren Übernahmen abgeschreckt wurden; dagegen liegen die erfolgversprechenden Ideen jenseits dieses Begriffes und vor allem beim Begriff der algebraischen Äquivalenz. Es wäre wahrscheinlich nicht zu empfehlen, diesen Begriff wörtlich zu übertragen, sondern man sollte ihn im abstrakten Gebiet durch eine passende neue Fassung ersetzen, die vielleicht besser dem gedachten Zweck entspricht. Hier würde es naheliegen, algebraische Mannigfaltigkeiten mit gleicher Postulationsformel, oder mit gleicher Hilbertfunktion, oder auch mit isomorpher Syzygienkette als äquivalent zu definieren.

Sehr bemerkenswert wäre auch die folgende Charakterisierung *irregulärer* Flächen und Mannigfaltigkeiten, die m. W. noch nie versucht worden ist: Eine Fläche, deren zugehöriger algebraischer Funktionenkörper K des Transzendenzgrades 2 einen nicht rationalen Unterkörper k des Transzendenzgrades 1 enthält oder mit einem solchen linear zusammenhängt (im Sinne von *A. Weil*), ist irregulär. Im ersten Fall enthält sie ein irrationales Büschel von Kurven. Das ist mit der Tatsache im Einklang, daß die Irregularität eine birational invariante Eigenschaft ist, welche nicht vom zufälligen projektiven Modell abhängt, und daher in einer Eigenschaft des Funktionenkörpers ihren Ausdruck finden muß. Die Verallgemeinerung dieses Irregularitätsbegriffes auf Mannigfaltigkeiten der Dimension d liegt nun auf der Hand. Dabei wird auch unmittelbar klar, daß eine V_d in bezug auf jede Stufe $1, 2, \ldots, d-1$ irregulär sein kann und daß man also zwischen diesen Irregularitäten unterscheiden muß, in Übereinstimmung mit einem Resultat, das *Severi* vor kurzem auf andern Weg gefunden hat.

W. Gröbner, Innsbruck

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Von *M. Fisz*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 40.) Mit 37 Textabb., X, 528 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 36.—.

Wohl jeder Verfasser eines Lehrbuches der mathematischen Statistik wird vor das Problem gestellt, wieviel er an Vorkenntnissen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussetzen soll. Einerseits wird diese benötigt — und zwar nicht nur ihre Resultate, sondern auch die Beweismethoden — andererseits erfordert deren Auseinandersetzung ein eigenes umfangreiches Buch. Es scheint, daß der Verfasser gerade den richtigen Weg gefunden hat, ein Buch über beide Gebiete zu schreiben, welches nicht allzu schwierig und umfangreich ist.

Der erste Teil (Wahrscheinlichkeitsrechnung) gliedert sich folgendermaßen: I. Zufällige Ereignisse. II. Zufällige Veränderliche. III. Die Parameter der Verteilung einer zufälligen Veränderlichen. IV. Charakteristische Funktionen. V. Einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen. VI. Grenzwertsätze. VII. Markoffsche Ketten. VIII. Stochastische Prozesse.

Die Beweise werden im allgemeinen vollständig ausgeführt, doch wird dabei an einigen Stellen die Lebesguesche Integrationstheorie vorausgesetzt — wie dies ja in der Natur der Sache liegt. Sehr oft werden tieferliegende Resultate mit

ausführlichen Erklärungen und Literaturhinweisen ohne Beweis angeführt. Selbstverständlich konnten z. B. in dem Kapitel VIII nur die Anfänge der Theorie der stochastischen Prozesse gegeben werden, aber der Leser findet alle möglichen Richtungen der Theorie kurz und prägnant dargestellt (z. B. die Geburts- und Todesprozesse in § 5).

Inhalt des zweiten Teils (Mathematische Statistik): IX. Stichprobenmomente und ihre Funktionen. X. Die Verteilung der Positionsstichprobenfunktionen. XI. Abriß der Iterationstheorie. XII. Signifikanzteste. XIII. Theorie der Schätzfunktionen. XIV. Methoden und Schemata zur Stichprobenerhebung. XV. Abriß der Varianzanalyse. XVI. Allgemeine Testtheorie. XVII. Elemente der Sequentialanalyse.

Zahlreiche vollständig durchgerechnete Beispiele (Tafeln der wichtigsten Verteilungen sind am Ende des Buches abgedruckt) sind für den Leser besonders wertvoll. Denn es ist bekannt, wie schwer es gerade in der Statistik ist, theoretische Ergebnisse bei konkreten Problemen anzuwenden. Besonders muß noch die klare Darstellungsweise vermerkt werden. — Zweifellos ist dies eine der reichhaltigsten und am klarsten geschriebenen Einführungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. *K. Prachar*, Wien

Lehrbuch der theoretischen Physik. 2. Band: Struktur der Materie. Von *W. Weizel.* Zweite, verbesserte Auflage. Mit 268 Textabb., XV, 989 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 88.—.

Die erste Auflage dieses Bandes wurde 1951 in der vorliegenden Zeitschrift (Mh. f. Math. 55, S. 261) besprochen, und schon damals wurde hervorgehoben, daß die Lösung der Aufgabe, eine Einführung in die moderne Quantentheorie und vor allem in die Quantentheorie der Wellenfelder zu geben, eine hervorragende und ausgezeichnete ist. Dasselbe kann auch bei der zweiten Auflage noch in verstärktem Maße gesagt werden. In dieser Auflage wurden die seither erzielten Fortschritte aufgenommen. Und zwar kam vor allem ein neuer Abschnitt „Feldtheorie der Materie" hinzu. Auch der Abschnitt „Quantentheorie" wurde bedeutend erweitert. Die Darstellung dieser schwierigen Theorie muß als ganz hervorragend bezeichnet werden. Es ist dem Verfasser gelungen, aus dem so komplizierten mathematischen Apparat das Grundsätzliche so glücklich herauszuheben, daß auf verhältnismäßig wenigen Seiten eine klare Übersicht dieser Theorien gewonnen wird. Dabei berücksichtigt der Verfasser die letzten Fortschritte der Theorie. Auch der Abschnitt über die Kernphysik wurde weitgehend ausgebaut und auf den neuesten Stand gebracht. Neu aufgenommen wurde beispielsweise auch ein Kapitel über Teilchenbeschleuniger, um, wie der Verfasser sagt, auch die Anwendungen entsprechend zu berücksichtigen.

Es kann nur wiederholt werden, was schon bei der Besprechung der ersten Auflage gesagt wurde: Es ist das moderne Lehrbuch der Physik, welches jedem, der Physik in Theorie und Praxis anzuwenden hat, nur wärmstens empfohlen werden kann. Besonders zu rühmen ist die sehr schöne Ausstattung.

E. Hlawka, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Kompendium der Kristallkunde

Von

Dr. W. F. de Jong

Lektor an der Technischen Hochschule Delft

Unter Mitwirkung von Dr. J. Bouman, Delft

Deutsche, nach der ersten holländischen Auflage
neu bearbeitete und erweiterte Ausgabe

Mit 227 Textabbildungen. VIII, 258 Seiten. Gr.-8°. 1959

Ganzleinen S 264.—, DM 44.—, sfr. 45.—, $ 10.50

Seit der *Laue*schen Entdeckung der Interferenzerscheinungen beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle hat die Kristallkunde gewaltige Fortschritte gemacht und heute eine solche Bedeutung gewonnen, daß man sie als einen ebenso wichtigen Abschnitt der Physik betrachten kann wie etwa die Thermodynamik. Physiker, Chemiker, Metallforscher und Kristallographen sind gleichermaßen an den Ergebnissen und Problemen der Kristallkunde interessiert. Überdies zeigte sich während und nach dem zweiten Weltkrieg, daß monokristallines Material viele praktische Anwendungen in der Elektrotechnik und in der Infrarotoptik findet.

Die vorliegende deutsche Ausgabe des *De Jong*schen „Compendium der Kristalkunde" ist gegenüber dem holländischen Original noch wesentlich erweitert und neu bearbeitet worden. Sie bietet eine gedrängte Übersicht über die geometrische Kristallographie, die Strukturkunde, die Kristallphysik und die Kristallchemie. Der Verfasser berücksichtigt alle modernen Methoden und weicht auch nicht den Hilfsmitteln der höheren Mathematik aus, wie etwa im letzten Abschnitt, wo er den Gebrauch von Tensoren behandelt. Ebenso werden die wichtigsten modernen Anwendungen der Kristallkunde erläutert. Das Buch ist zwar in erster Linie für die Studierenden der exakten Naturwissenschaften gedacht, wird aber auch allen anderen an den modernen Ergebnissen und Methoden der Kristallkunde Interessierten willkommen sein.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Dr. phil. **Adalbert Duschek**

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

In vier Bänden

Soeben erschien:

Zweiter Band: **Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Lineare Algebra. Tensorfelder. Differentialgeometrie.** Zweite, neu bearbeitete Auflage. Mit 136 Textabbildungen. VIII, 401 Seiten. Gr.-8°. 1958.

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, $ 10.70
Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

Der zweite Band bringt mit der Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen die im ersten Band begonnene Differential- und Integralrechnung zum Abschluß. Darüber hinaus enthält er einige größere Abschnitte, die teils zur Abrundung des Stoffes, teils als Vorbereitung für die folgenden Bände notwendig sind: die lineare Algebra, d. h. die Determinanten, die linearen Gleichungen und die wichtigsten Sätze der Tensorrechnung, sowie schließlich die Grundzüge der Theorie der Tensorfelder und den Abschnitt über Differentialgeometrie, der in die vorliegende zweite Auflage neu hineingenommen wurde. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik haben in den letzten Jahren eine solche Entwicklung in die Breite und Tiefe genommen, daß es zweckmäßig erschienen ist, dieses Kapitel in der zweiten Auflage nicht mehr zu bringen, weil dieser Band sonst seinen Rahmen umfangmäßig weit überschritten hätte.

Erster Band: **Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen.** Zweite, neu bearbeitete Auflage. Mit 169 Textabbildungen. XII, 440 Seiten. Gr.-8°. 1956.

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, $ 10.70
Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

Dritter Band: **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.** Mit 107 Textabbildungen. IX, 512 Seiten. Gr.-8°. 1953.

S 220.—, DM 36.50, sfr. 37.40, $ 8.70
Ganzleinen S 235.—, DM 38.80, sfr. 39.80, $ 9.25

Im Sommer 1959 erscheint

Vierter Band: **Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplace-Transformation. Randwertprobleme. Potentialtheorie.**